제 2 장 연습문제

1 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 감자의 재배면적

$x_2 \Rightarrow$ 옥수수의 재배면적

목적함수 : Maximize $z = 300\text{만}x_1 + 200\text{만}x_2$

제약조건 : subject to

$x_1 + x_2 \leq 100$ (총 재배면적)

$50x_1 + 30x_2 \leq 3000$ (연간 총 노동시간)

$x_2 \leq 80$ (옥수수의 최대 재배가능면적)

비음수조건: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 여자용 등산화의 월간 생산량

$x_2 \Rightarrow$ 남자용 등산화의 월간 생산량

목적함수 : Maximize $z = 5000x_1 + 8000x_2$

제약조건 : subject to

$x_1 + 1\tfrac{1}{2}x_2 \leq 900$ (봉제공정의 노동가능시간)

$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \leq 300$ (마무리공정의 노동가능시간)

$\tfrac{1}{8}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 100$ (포장/수송공정의 노동가능시간)

비음수조건: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

3 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 고려화학주식회사에 투자한 금액

$x_2 \Rightarrow$ 남선공업주식회사에 투자한 금액

$x_3 \Rightarrow$ 국제화학주식회사에 투자한 금액

목적함수 : Maximize $z = 7000x_1 + 9000x_2 + 11000x_3$

제약조건 : subject to

$35000x_1 + 40000x_2 + 60000x_3 \leq 1500000000$ (총 투자금액)

$0.25x_1 + 0.5x_2 + 0.35x_3 \leq 10000$ (총 위험도)

$x_1 \leq 10000$ (고려화학주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)

$x_2 \leq 10000$ (남선공업주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)

$x_3 \leq 10000$ (국제화학주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)

비음수조건: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

4 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 일반 야구글러브의 1 일 생산량

$x_2 \Rightarrow$ Catcher용 글러브의 1 일 생산량

목적함수 : Minimize $z = 5000(2x_1 + 3x_2) + 9000(4x_1 + 6x_2)$

제약조건 : subject to

$2x_1 + 3x_2 \leq 80$ (반숙련공의 노동가능시간)

$4x_1 + 6x_2 \leq 150$ (숙련공의 노동가능시간)

$x_1 \geq 75$ (일반 글러브의 최소한의 1 일 생산량)

$x_2 \geq 40$ (Catcher 용 글러브의 최소한의 1 일 생산량)

비음수조건: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

5 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 옥수수의 구입량(Kg)

$x_2 \Rightarrow$ 쌀겨의 구입량(Kg)

목적함수 : Minimize $z = 1000x_1 + 1500x_2$

제약조건 : subject to

$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 60$ (필요한 칼슘의 량)

$0.2x_1 + 0.15x_2 \geq 100$ (필요한 단백질의 량)

$x_2 \geq 3x_1$ (옥수수 1kg의 구입에 필요한 쌀겨의 구입량)

비음수조건: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

6 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 빵의 구입량

$x_2 \Rightarrow$ 쇠고기의 구입량

$x_3 \Rightarrow$ 감자의 구입량

$x_4 \Rightarrow$ 배추의 구입량

$x_5 \Rightarrow$ 우유의 구입량

목적함수 : Minimize $z = 300x_1 + 1000x_2 + 50x_3 + 100x_4 + 240x_5$

제약조건 : subject to

$1200x_1 + 1450x_2 + 320x_3 + 50x_4 + 310x_5 \geq 3000$ (최소 칼로리)

$40x_1 + 75x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 16x_5 \geq 70$ (최소 단백질)

$420x_1 + 30x_2 + 45x_3 + 240x_4 + 530x_5 \geq 800$ (최소 칼슘)

$70x_3 + 860x_4 + 720x_5 \geq 500$ (최소 비타민)

비음수조건: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$

7 <답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 1 분기의 구매량, $y_1 \Rightarrow$ 1 분기의 판매량 $I_1 \Rightarrow$ 1 분기의 기말재고

$x_2 \Rightarrow$ 2 분기의 구매량, $y_2 \Rightarrow$ 2 분기의 판매량 $I_2 \Rightarrow$ 2 분기의 기말재고

$x_3 \Rightarrow$ 3 분기의 구매량, $y_3 \Rightarrow$ 3 분기의 판매량 $I_3 \Rightarrow$ 3 분기의 기말재고

$x_4 \Rightarrow$ 4 분기의 구매량, $y_4 \Rightarrow$ 4 분기의 판매량 $I_4 \Rightarrow$ 4 분기의 기말재고

목적함수 : Maximize $z = 10(y_1 - x_1) + 12(y_2 - x_2) + 8(y_3 - x_3) + 9(y_4 - x_4) - 2000(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$

제약조건 : subject to

$50 + x_1 - y_1 = I_1$

$I_1 + x_2 - y_2 = I_2$

$I_2 + x_3 - y_3 = I_3$

$I_3 + x_4 - y_4 = I_4$

$I_1 \leq 100$

$I_2 \leq 100$

$I_3 \leq 100$

$I_4 \leq 100$

비음수조건: $x_{1,2,3,4} \geq 0$, $y_{1,2,3,4} \geq 0$, $I_{1,2,3,4} \geq 0$

8 <답>

변수정의 : x_1 ⇒ 시간대 1, 즉 0-4시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수
x_2 ⇒ 시간대 2, 즉 4-8시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수
x_3 ⇒ 시간대 3, 즉 8-12시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수
x_4 ⇒ 시간대 4, 즉 12-16시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수
x_5 ⇒ 시간대 5, 즉 16-20시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수
x_6 ⇒ 시간대 6, 즉 20-24시 사이에 근무를 시작하는 간호원의 수

목적함수 : Minimize $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

제약조건 : subject to

$x_6 + x_1 \geq 4$ (시간대 1 에 필요한 간호원의 수)
$x_1 + x_2 \geq 6$ (시간대 2 에 필요한 간호원의 수)
$x_2 + x_3 \geq 90$ (시간대 3 에 필요한 간호원의 수)
$x_3 + x_4 \geq 85$ (시간대 4 에 필요한 간호원의 수)
$x_4 + x_5 \geq 55$ (시간대 5 에 필요한 간호원의 수)
$x_5 + x_6 \geq 20$ (시간대 6 에 필요한 간호원의 수)

비음수조건: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$

9 <답>

변수정의 : x_1 ⇒ 첫 해의 투자하지 않고 남은 금액
x_2 ⇒ 두 번째 해의 투자하지 않고 남은 금액
x_3 ⇒ 세 번째 해의 투자하지 않고 남은 금액
x_4 ⇒ 네 번째 해의 투자하지 않고 남은 금액
x_5 ⇒ 다섯 번째 해의 투자하지 않고 남은 금액
A_1 ⇒ 첫 해에 투자안 A 에 투자한 금액
B_1 ⇒ 첫 해에 투자안 B 에 투자한 금액
A_2 ⇒ 두번째 해에 투자안 A 에 투자한 금액
B_2 ⇒ 두 번째 해에 투자안 B 에 투자한 금액
C_2 ⇒ 두 번째 해에 투자안 C 에 투자한 금액
A_3 ⇒ 세 번째 해에 투자안 A 에 투자한 금액
B_3 ⇒ 세 번째 해에 투자안 B 에 투자한 금액
A_4 ⇒ 네 번째 해에 투자안 A 에 투자한 금액
D_5 ⇒ 다섯 번째 해에 투자안 D 에 투자한 금액

목적함수 : Maximize $z = 1.3D_5 + x_5$ (5년 말의 투자금액)

제약조건 : subject to

$100{,}000{,}000 - (A_1 + B_1) = x_1$ (첫 해의 투자계획)
$x_1 - (A_2 + B_2 + C_2) = x_2$ (두 번째 해의 투자계획)
$x_2 + 1.5A_1 - (A_3 + B_3) = x_3$ (세 번째 해의 투자계획)
$x_3 + 1.5A_2 + 1.8B_1 - A_4 = x_4$ (네 번째 해의 투자계획)
$x_4 + 1.5A_3 + 1.8B_2 + 2.0C_2 - D_5 = x_5$ (다섯 번째 해의 투자계획)

비음수조건: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ 등 모든 변수의 값은 0 보다 큼

10 <답>

변수정의 : $x_t \Rightarrow$ t 월의 생산증가량, t = 0, 1, 2, ... 12, t=0 는 전년도 12월을 의미함

$y_t \Rightarrow$ t 월의 생산감소량, t = 0, 1, 2, ... 12, t=0 는 전년도 12월을 의미함

$I_t \Rightarrow$ t 월의 재고량, t = 0, 1, 2, ... 12, t=0 는 전년도 12월을 의미함

$P_t \Rightarrow$ t 월의 생산량, t = 0, 1, 2, ... 12, t=0 는 전년도 12월을 의미함

$S_t \Rightarrow$ t 월의 판매예상량, t = 1, 2, ... 12

목적함수 : Minimize $z = 400(x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}) + 200(y_1 + y_5 + \ldots + y_{12})$

제약조건 : subject to

$I_{t-1} + P_{t-1} + x_{t-1} - y_{t-1} - I_t \geq S_t \quad t = 1,2,3, \ldots, 12$

$I_t \leq 10,000 \quad t = 1,2,3,\ldots, 12$

$P_0 = 3000$

$I_0 = 2000$

$S_1 = 3,000$

$S_2 = 5,000$

$S_3 = 7,000$

$S_4 = 10,000$

$S_5 = 14,000$

$S_6 = 17,000$

$S_7 = 18,000$

$S_8 = 10,000$

$S_9 = 7,000$

$S_{10} = 5,000$

$S_{11} = 3,000$

$S_{12} = 2,000$

비음수조건: 모든 변수는 0 보다 크거나 같아야 함.

11 <답>

변수정의 : $x_{11} \Rightarrow$ 공급자 1 로부터 구입하는 부품 1의 구입량

$x_{12} \Rightarrow$ 공급자 1 로부터 구입하는 부품 2의 구입량

$x_{21} \Rightarrow$ 공급자 2 로부터 구입하는 부품 1의 구입량

$x_{22} \Rightarrow$ 공급자 2 로부터 구입하는 부품 2의 구입량

$x_{31} \Rightarrow$ 공급자 3 으로부터 구입하는 부품 1의 구입량

$x_{32} \Rightarrow$ 공급자 3 으로부터 구입하는 부품 2의 구입량

목적함수:

Minimize $z = 6300x_{11} + 5600x_{12} + 6200x_{21} + 5800x_{22} + 6700x_{31} + 5300x_{32}$

제약조건 : subject to

$x_{11} + x_{12} \leq 600$ (공급자 1 의 생산능력)

$x_{21} + x_{22} \leq 1000$ (공급자 1 의 생산능력)

$x_{31} + x_{32} \leq 800$ (공급자 1 의 생산능력)

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1200$ (부품 1 의 소요량)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 600$ (부품 2 의 소요량)

비음수조건: $x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0,\ x_{22} \geq 0, x_{31} \geq 0,\ x_{32} \geq 0$

12 <답>

변수정의 :

x_{11} ⇒ 공장 1에서 생산해서 대리점 1 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{12} ⇒ 공장 1에서 생산해서 대리점 2 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{13} ⇒ 공장 1에서 생산해서 대리점 3 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{14} ⇒ 공장 1에서 생산해서 대리점 4 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{15} ⇒ 공장 1에서 생산해서 대리점 5 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{21} ⇒ 공장 2에서 생산해서 대리점 1 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{22} ⇒ 공장 2에서 생산해서 대리점 2 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{23} ⇒ 공장 2에서 생산해서 대리점 3 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{24} ⇒ 공장 2에서 생산해서 대리점 4 에 공급하는 IC 칩의 개수
x_{25} ⇒ 공장 2에서 생산해서 대리점 5 에 공급하는 IC 칩의 개수

목적함수: Minimize

$$z = 2235x_{11} + 2220x_{12} + 2250x_{13} + 2245x_{14} + 2220x_{15} + 2460x_{21} + 2445x_{22} + 2420x_{23} + 2430x_{24} + 2455x_{25}$$

제약조건 : subject to

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \le 8000$ (공장 1 의 생산능력)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \le 7000$ (공장 2 의 생산능력)
$x_{11} + x_{21} \ge 2000$ (대리점 1 의 소요량)
$x_{12} + x_{22} \ge 3000$ (대리점 2 의 소요량)
$x_{13} + x_{23} \ge 1000$ (대리점 3 의 소요량)
$x_{14} + x_{24} \ge 5000$ (대리점 4 의 소요량)
$x_{15} + x_{25} \ge 4000$ (대리점 5 의 소요량)

비음수조건: 모든 변수는 음수가 될 수 없음

제 3 장 연습문제

1 다음의 선형계획모형을 그래프를 이용하여 풀어라.

(a)
답>
$x_1 = 0$
$x_2 = 5$
$z = 10$

(b)
답>
무한해

(c)
답>
$x_1 = \frac{1}{2}$
$x_2 = 1\frac{1}{2}$
$z = 5$

(d)
답>
실행불가능

(e)
답>
$x_1 = 3$
$x_2 = 10$
$z = 36$, 다수최적해임

(f)
답>
$x_1 = 3\frac{1}{3}$
$x_2 = 1$
$z = 11$

2 다음을 그래프를 이용하여 풀어라.

(a)
답>
$x_1 = 12$
$x_2 = 0$
$z = 36$

(b)
답>
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$z = 8$

(c)
답>
$x_1 = 186\frac{2}{3}$
$x_2 = 253\frac{1}{3}$
$z = 31333\frac{1}{3}$

(d)
답>
$x_1 = 400$
$x_2 = 0$
$z = 8000$

(e)
답>
$x_1 = 12$
$x_2 = 10$
$z = 152$

(f)
답>
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$z = 5$

3 답> 감자 12 정보, 옥수수 80정보를 재배할 때 최대이익 196,000,000 원
4 답> 여자등산화 50켤레, 남자등산화 150켤레를 생산할 때 최대생산이익 3,700,000원
5 답> 실행불가능함
6 답> 옥수수 $\frac{2000}{13}$kg, 쌀겨 $\frac{6000}{13}$kg을 구입할 때 최소구입비용 $846153\frac{11}{13}$ 원

7 다음과 같은 선형계획모델이 주어졌을 때
(c) 그래프에 의하여 최적해 및 Z 값을 구하라.
$x_1 = 8\frac{1}{3}$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$, $z = 68\frac{1}{3}$
(d) 속박적 제약식과 비속박적 제약식을 찾으라.
첫 번째 제약식 비속박적, 두 번째 제약식과 세 번째 제약식 속박적
(e) 각 제약식에 있어 여유값을 구하라.
첫 번째 제약식의 여유값 $13\frac{2}{3}$, 두 번째 제약식 및 세 번째 제약식의 여유값은 0

8 (a) 그래프에 의하여 실행가능영역을 표시하라.
(b) 실행가능영역의 꼭지점은 몇 개이며 이의 좌표는?

9 (a) 그래프에 의하여 실행가능영역을 표시하라.
(b) 실행가능영역의 꼭지점은 몇 개이며 이의 좌표는?
(c) 그래프에 의하여 최적해를 구하라.
x_1= 5, x_2=1, z=7

10 (c) 그래프에 의하여 최적해 및 Z 값을 구하라.
x_1= 6, x_2= 4, z=26
(d) 각 제약조건식의 여유 또는 잉여는 얼마인가?
제약식 1 은 속박적 제약식, 따라서 여유 및 잉여값은 없슴
제약식 2 은 비속박적 제약식, 잉여값 = 4
제약식 3 은 속박적 제약식, 따라서 여유 및 잉여값은 없슴

11 (a) 그래프를 이용하여 최적해를 구하라.
x_1= 3, x_2= 1.5, z = 4.5
(b) 만일 목적함수가 1 x_1+2 x_2로 바뀐다면 최적해는 어떻게 변하는가?
x_1= 2.4, x_2= 1.8, z = 6

12 (a) 그래프를 이용하여 최적해를 구하라.
x_1= 0, x_2= 4, z= 8
(b) 이 문제에서 비속박적 제약식이 존재하는가? 만약 존재한다면 어느 것인가?
존재함. 두 번째 제약식
또 비속박적 제약식이 제거된다면 최적해는 변화하는가?
아무런 변화도 하지 않음

13 (a) 그래프에 의하여 최적해를 구하라.
x_1= 2, x_2= 0, z = 8
(b) 원래의 문제에서 자원 1 이 4 에서 3 으로 감소하면 목적함수의 값은 어떻게 될까?
목적함수의 값은 8에서 6 으로 감소함.
(c) 자원 2 가 10 에서 11 로 증가하면 목적함수의 값은 어떻게 변화하는가?
목적함수의 값은 변하지 않음

14 (a) 그래프를 이용하여 최적해 및 목적함수값을 구하라.
x_1= 5, x_2= 0, z=30
(b) 자원 1 의 사용가능량 즉 우변항의 값이 얼마로 증가할 때 해당 제약식이 비속박적 제약식으로 바뀌는가? 17.5, 또 이 때의 목적함수값 Z 는 얼마인가? z = 52.5
(c) 자원 2 의 사용가능량이 얼마 이하로 감소하면 해당 제약식이 속박적 제약식으로 변하는가? 30, 이 때의 목적함수값은 얼마인가? z = 30

15 (a)
마분지 상자의 수 : 77.777, 나무상자의 수 : 111.1111
(b) 이 회사의 최대이익은 얼마인가? 2,555,555.555
(c) 각 공정에 있어서 여유시간은 얼마인가?
절단공정 : 없슴.
마무리 공정 : 여유값 52.7777 시간 존재
포장공정 : 없음
(d) 비속박적 제약식이 존재하는가? 존재한다. 두 번째의 마무리공정에 대한 제약식

16 (a) 일반용 자전거 주문대수 : 일반용 자전가 300대, 경주용 자전거 100 대
(b) 그래프에 의하여 최적해를 구하라. 4,500,000 원
(c) 속박적 제약식은 어느 것인가? 첫 번째 및 두 번째 제약식

17 (a) 중형버스의 1일 운행횟수 : 40회, 대형버스의 1일 운행횟수 : 100/9, 총수송인원=1644명
(b) 만일 예산이 4억 원으로 감축된다면 최적수송인원은 얼마가 될까?
중형버스의 1일 운행횟수 : 40회, 총수송인원=1200명이 된다.

18 (a) 그래프를 이용하여 최적해를 구하시오.

답> 사료 1 의 구입량 80kg, 사료 2의 구입량 340kg, 최소비용 1,600,000 원

(b) 탄수화물의 경우 월간 섭취필요량이 1 kg 증가하면 목적함수의 값은 어떻게 되나?
사료구입비용이 50,000원 증가한다.
(c) 사료 1 의 비용이 변할 때 현재의 해가 그대로 최적해로 남게 되는 범위를 구하시오.
답> 1333⅓ 와 8000 사이

19
답> ½″ 합판의 생산량 77600m, ¼″ 합판의 생산량 4000 m, 최대생산이익 2,408,000,000 원
생산시간의 시간당 한계가치 = 600,000 원

20
(a) 이익을 최대로 하는 생산계획을 수립할 수 있는 선형계획모델을 작성하시오.
변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 보통소주의 생산량
$x_2 \Rightarrow$ 순한 맛 소주의 생산량

목적함수 : Maximize $z = 8000x_1 + 6000x_2$
제약조건 : subject to
$2x_1 + 3x_2 \le 20{,}000$ (생산시간;시간)
$4000x_1 + 3000x_2 \le 5{,}000{,}000 + 4000*0.5*x_1 + 3000*0.4*x_2$ (운전자금)
비음수조건: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
(b) 그래프를 이용하여 최적의 생산계획을 구하시오.
답> 보통소주의 생산량 = 2500, 순한 맛 소주는 생산하지 않음, 총이익 = 20,000,000원
(c) 30만원을 투자하여 기계사용시간을 1,000 시간 늘릴 수 있다면 바람직한 투자인지 결정하시오.
답> 바람직하지 않음.
(d) 보통 소주의 판매단가가 변할 현재의 해가 그대로 최적해로 남게 되는 범위를 구하시오.
답> $-\frac{c_1}{c_2} \le -\frac{10}{9} \Longrightarrow -\frac{c_1}{6000} \le -\frac{10}{9}$, $c_1 \le \frac{6000}{9}$

(e) 운전자금이 1만 원 늘어나면 이익은 얼마가 증가하는가? 은행에서 연 10 %로 운전자금을 빌릴 수 있을 때 빌리는 것이 유리한지 결정하시오.
답> 운전자금이 1만원 늘어나면 이익은 4만원 증가, 은행에서 운전자금을 빌리는 것이 유리함.

21
(a) 답> 제품 1의 생산량 = 1200, 제품2의 생산량 = 600, 총이익 = 420,000원
(b) 전기톱의 작업시간이 1 시간 늘어날 때 이익은 얼마나 증가하는가?
답> 이 경우 총이익은 432,000 이므로 이익은 12,000원 늘어남.

제 4 장 연습문제

1 다음의 용어들을 설명하라.

(a) 표준형

선형계획문제의 제약조건식에 여유변수, 잉여변수, 또는 인위변수를 삽입하여 등식의 형태로 변환한 것

(b) 기저해

심플렉스법에서 0 으로 간주되지 않은 변수들, 즉 기저변수의 해

(c) 비기저변수

심플렉스법에서 0 으로 간주된 변수

(d) 최적해

선형계획법에서 최적의 해를 제공하는 변수의 값 및 목적함수의 값

(e) 다수최적해

선형계획문제가 하나 이상의 최적해를 가질 때

(f) 무한해

선형계획문제의 해가 무한할 때, 즉 변수 중 하나의 값이 무한하고 따라서 최적해가 무한할 때

(g) 퇴화해

심플렉스법에서 더 이상 목적함수의 값이 향상되지 않은 채 일정한 기저해가 반복되면서 풀리지 않는 해

(h) 실행불가능해

선형계획문제의 실행가능 영역이 존재하지 않아 실행가능한 해를 찾을 수 없는 해

2 <답>

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$ --------- 식 1

$x_1 + x_2 + x_4 = 5$ --------- 식 2

식 1 에 -1을 곱하여 식 2에 더하면,

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$ --------- 식 1

$4x_2 - x_3 + x_4 = 2$ --------- 식 3

식 3 에 $\frac{3}{4}$을 을 곱하여 식 1에 더하면,

$x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 4\frac{1}{2}$ --------- 식 4

$4x_2 - x_3 + x_4 = 2$ --------- 식 3

다시 식 4 에 $\frac{1}{4}$을 곱하면,

$x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 4\frac{1}{2}$ --------- 식 4

$x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{2}$ --------- 식 5

3

답>

$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 5x_5 = 40$ -------- 식 1

$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 30$ -------- 식 2

$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 12$ -------- 식 3

식 3 에 -3을 곱한 후 이를 식 1 에 더해주고, 또다시 식 3에 -2를 곱한 후 이를 식 2 에 더해주면,

$-5x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4$ -------- 식 4

$-3x_2 - 1x_3 + 4x_4 - x_5 = 6$ -------- 식 5

$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 12$ -------- 식 3

식 4에 -3/5을 곱한 후 이를 식 5에 더해주고, 다시 식 4 에 1/5을 곱한 후 식 3에 더해주면,

$-5x_2 + 2x_3 + 1.6x_4 + 2.2x_5 = 3.6$ -------- 식 4

$-1x_3 + 4x_4 - x_5 = 6$ -------- 식 6

$x_1 + 2x_3 - 0.2x_4 + 1.4x_5 = 11.2$ -------- 식 7

식 6에 -2/5를 곱한 후 식 4에 더해주고, 다시 0.05를 곱한 후 식 7에 더해주면,

$-5x_2 + 2.4x_3 + 2.6x_5 = 1.2$ -------- 식 8

$-1x_3 + 4x_4 - x_5 = 6$ -------- 식 6

$x_1 + 1.95x_3 + 1.35x_5 = 10.9$ -------- 식 9

마지막으로 식 8에 -1/5를 곱하고, 식 6에 1/4을 곱하면 된다.

$x_2 + .48x_3 + .52x_5 = .24$ -------- 식 8

$-\frac{1}{4}x_3 + x_4 - \frac{1}{4}x_5 = 1.5$ -------- 식 6

$x_1 + 1.95x_3 + 1.35x_5 = 10.9$ -------- 식 9

4

5 아래의 문제를 심플렉스방법으로 풀고 속박적 제약식과 비속박적 제약식을 구분하라.

(a)
<답> $x_1 = 0$, $x_2=15$, z=120

(b)
<답> $x_1 = 5$, $x_2=7.5$, z = 92.5

(c)
<답> <답> $x_1 = 14$, $x_2=4$, $x_3=12$, z=62

(d)
<답> $x_1 = 0$, $x_2=15$, z=120

(e)
<답> 무한해

(f)
<답> $x_1 = 0$, $x_2=64$, $x_3=0$, z=128

6 (a) <답> $x_1 = 13\frac{1}{3}$, $x_2=16\frac{2}{3}$, $x_3=0$, $z=0$

(b) <답> $x_1 = 0$, $x_2= 14\frac{2}{7}$, $x_3=0$, $x_4= 3\frac{6}{7}$, $z= x_2= 57\frac{1}{7}$

7 제 2 장 연습문제 중 1 번 문제를 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하라.

<표준형>

Maximize $z = 300만 x_1 + 200만 x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 + s_1 = 100$$
$$50x_1 + 30x_2 + s_2 = 3000$$
$$x_2 \quad s_3 = 80$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
기저변수	c_j	300만	200만	0	0	0	우변항의 값
s_1	0	1	1	1	0	0	100
s_2	0	50	30	0	1	0	3000
s_3	0	0	1	0	0	1	80
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		300만	200만	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	0	-1	20
s_2	0	50	0	0	1	-30	600
x_2	200만	0	1	0	0	1	80
z_j		0	200만	0	0	200만	16000만
$c_j - z_j$		300만	0	0	0	-200만	
s_1	0	0	0	1	-1/50	2/5	8
x_1	300만	1	0	0	1/50	-3/5	12
x_2	200만	0	1	0	0	1	80
z_j		300만	200만	0	6만	20만	19600만
$c_j - z_j$		0	0	0	-6만	-20만	

<답> $x_1=12$, $x_2=18$, z = 1억 9600만 원

8 제 2 장 연습문제 중 2 번 문제를 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하라.

<표준형>

Maximize $z = 5000x_1 + 8000x_2$

subject to

$$x_1 + 1\tfrac{1}{2}x_2 \le 900 \quad \text{(봉제공정의 노동가능시간)}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \le 300 \quad \text{(마무리공정의 노동가능시간)}$$
$$\tfrac{1}{8}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \le 100 \quad \text{(포장/수송공정의 노동가능시간)}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
기저변수	c_j	5000	8000	0	0	0	우변항의 값
s_1	0	1	$1\frac{1}{2}$	1	0	0	900
s_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	300
s_3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	100
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		5000	8000	0	0	0	
s_1	0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	-6	300
s_2	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-1\frac{1}{3}$	$166\frac{2}{3}$
x_2	8000	$\frac{1}{2}$	1	0	0	4	400
z_j		4000	8000	0	0	32000	3200000
$c_j - z_j$		1000	0	0	0	32000	
s_1	0	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	-5	175
x_1	5000	1	0	0	3	-4	500
x_2	8000	0	1	0	$-1\frac{1}{2}$	6	300
z_j		5000	8000	0	3000	24000	4900000
$c_j - z_j$		0	0	0	-3000	-24000	

<답> x_1=500, x_2=300, z = 4900000

9 제 2 장 연습문제 중 3 번 문제를 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하라.

<표준형>

Maximize $z = 7000x_1 + 9000x_2 + 11000x_3$

subject to

$$35000x_1 + 40000x_2 + 60000x_3 \le 1500000000 \quad \text{(총 투자금액)}$$
$$0.25x_1 + 0.5x_2 + 0.35x_3 \le 10000 \quad \text{(총 위험도)}$$
$$x_1 \le 10000 \quad \text{(고려화학주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)}$$
$$x_2 \le 10000 \quad \text{(남선공업주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)}$$
$$x_3 \le 10000 \quad \text{(국제화학주식회사에 투자할 수 있는 총 주식수)}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
기저변수	c_j	7000	9000	11000	0	0	0	0	0	우변항의 값
s_1	0	35	40	60	1	0	0	0	0	1500000
s_2	0	.25	.5	.35	0	1	0	0	0	10000
s_3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10000
s_4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	10000
s_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	10000
z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		7000	9000	11000	0	0	0	0	0	

s_1	0	35	40	0	1	0	0	0	−60	900000
s_2	0	.25	.5	0	0	1	0	0	−.35	6500
s_3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10000
s_4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	10000
x_3	11000	0	0	1	0	0	0	0	1	10000
z_j		0	0	11000	0	0	0	0	11000	110000000
$c_j - z_j$		7000	9000	0	0	0	0	0	−11000	
s_1	0	35	0	0	1	0	0	−40	−60	500000
s_2	0	.25	0	0	0	1	0	−.5	−.35	1500
s_3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10000
x_2	9000	0	1	0	0	0	0	1	0	10000
x_3	11000	0	0	1	0	0	0	0	1	10000
z_j		0	9000	11000	0	0	0	9000	11000	200000000
$c_j - z_j$		7000	0	0	0	0	0	−9000	−11000	
s_1	0	0	0	0	1	0	0	−40	−60	500000
x_1	7000	1	0	0	0	4	0	−2	−1.4	6000
s_3	0	0	0	0	0	−4	1	2	1.4	4000
x_2	9000	0	1	0	0	0	0	1	0	10000
x_3	11000	0	0	1	0	0	0	0	1	10000
z_j		7000	9000	11000	0	28000	0	−5000	1200	242000000
$c_j - z_j$		0	0	0	0	−28000	0	5000	−1200	
s_1	0	0	0	0	1	−80	20	0	−32	580000
x_1	7000	1	0	0	0	0	1	0	0	10000
s_4	0	0	0	0	0	−2	$\frac{1}{2}$	1	.7	2000
x_2	9000	0	1	0	0	2	$-\frac{1}{2}$	0	−.7	8000
x_3	11000	0	0	1	0	0	0	0	1	10000
z_j		7000	9000	11000	0	18000	2500	0	4700	252000000
$c_j - z_j$		0	0	0	0	−28000	0	5000	−4700	

<답> x_1=10000, x_2=8000, x_3 = 10000, z = 252000000

10 제 2 장 연습문제 중 4 번 문제를 심플레스법을 이용하여 최적해를 구하라.
<표준형>

x_1 ⇒ 일반 야구글러브의 1 일 생산량

x_2 ⇒ Catcher용 글러브의 1 일 생산량

Minimize $z = 5000x_1 + 9000x_2$

subject to

$2x_1 + 3x_2 \le 80$ (반숙련공의 노동가능시간)

$4x_1 + 6x_2 \le 150$ (숙련공의 노동가능시간)

$x_1 \ge 75$ (일반 글러브의 최소한의 1 일 생산량)

$x_2 \ge 40$ (Catcher 용 글러브의 최소한의 1 일 생산량)

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

기저변수	c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	s_4	a_2	우변항의 값
		−5000	−9000	0	0	0	−M	0	−M	
s_1	0	2	3	1	0	0	0	0	0	80
s_2	0	4	6	0	1	0	0	0	0	150
a_1	−M	1	0	0	0	−1	1	0	0	75
a_2	−M	0	1	0	0	0	0	−1	1	40
z_j		−M	−M	0	0	M	−M	M	−M	−115M
$c_j - z_j$		−5000+M	−9000+M	0	0	0	−M	0	−M	
s_1	0	0	0	1	−½	0	0	0	0	5
x_2	−9000	⅔	1	0	1/6	0	0	0	0	25
a_1	−M	1	0	0	0	−1	1	0	0	75
a_2	−M	−⅔	0	0	−1/6	0	0	−1	1	15
z_j		−6000−⅓M	−9000	0	−1500+1/6M	M	−M	M	−M	−225000−90M
$c_j - z_j$		1000+⅓M	0	0	1500−1/6M	−M	0	−M	0	
s_1	0	0	0	1	−½	0	0	0	0	5
x_1	−5000	1	1½	0	¼	0	0	0	0	37.5
a_1	−M	0	−1½	0	−¼	−1	1	0	0	37.5
a_2	−M	0	1	0	0	0	0	−1	1	40
z_j		−5000	−7500+½M	0	−1250+¼M	M	−M	M	−M	−187500−77.5M
$c_j - z_j$		0	−1500−½M	0	1250−¼M	−M	0	−M	0	

<답> 실행불가능

11 제 2 장 연습문제 중 5 번 문제를 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하라.

<표준형>

Minimize $z = 1000x_1 + 1500x_2$

subject to

$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 60$ (필요한 칼슘의 량)

$0.2x_1 + 0.15x_2 \geq 100$ (필요한 단백질의 량)

$x_2 \geq 3x_1$ (옥수수 1kg의 구입에 필요한 쌀겨의 구입량)

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

기저변수	c_j	x_1	x_2	s_1	a_1	s_2	a_2	s_3	우변항의 값
		−1000	−1500	0	−M	0	−M	0	
a_1	−M	0.1	0.2	−1	1	0	0	0	60
a_2	−M	0.2	0.15	0	0	−1	1	0	100
s_3	0	3	−1	0	0	0	0	1	0
z_j		−0.3M	−0.35M	M	−M	M	−M	0	−160M
$c_j - z_j$		−1000+0.3M	−1500+.35M	−M	0	−M	0	0	
a_1	−M	0	7/30	−1	1	0	0	−1/30	60
a_2	−M	0	13/60	0	0	−1	1	−2/30	100
x_1	−1000	1	−1/3	0	0	0	0	1/3	0
z_j		−1000	333⅓−11/20M	M	−M	M	−M	0.1M−333⅓	−160M
$c_j - z_j$		1000	11/20M−1500	−M	0	−M	0	−1/10M	
x_2	−1500	0	1	−30/7	30/7	0	0	−1/7	257 1/7
a_2	−M	0	0	13/14	−13/14	−1	1	−1/28	44 2/7

x_1	-1000	1	0	-9/7	9/7	0	0	2/7	85 5/7
z_j		-1000	-1500	54000/7-13/14M	54000/7+13/14M	M	-M	-500/7+1/28M	471428.57-44 2/7M
c_j-z_j		0	0	-54000/7+13/14M	-54000/7-1/14M	-M	0	500/7-1/28M	
x_2	-1500	0	1	0	0	-60/13	60/13	-4/13	461 7/13
s_1	0	0	0	1	-1	-14/13	14/13	-1/26	47 9/13
x_1	-1000	1	0	0	0	-20/13	20/13	3/13	153 11/13
z_j		-1000	-1500	0	0	$8461\frac{7}{13}$	$-8461\frac{7}{13}$	$230\frac{10}{13}$	$846153\frac{11}{13}$
c_j-z_j		0	0	0	-M	$-8461\frac{7}{13}$	$8461\frac{7}{13}$ -M	$-230\frac{10}{13}$	

<답> x_1 = 153 11/13 , x_2 = 461 7/13, z = $846153\frac{11}{13}$

12 제 2 장 연습문제 중 6 번 문제의 초기심플렉스표를 작성하시오.

<답>

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	a_1	s_2	a_2	s_3	a_3	s_4	a_4	
기저변수	c_j	-300	-1000	-50	-100	-240	0	-M	0	-M	0	-M	0	-M	우변항의 값
a_1	-M	1200	1450	320	50	310	-1	1	0	0	0	0	0	0	3000
a_2	-M	40	75	8	4	16	0	0	-1	1	0	0	0	0	70
a_3	-M	420	30	45	240	530	0	0	0	0	-1	1	0	0	800
a_4	-M	0	0	70	860	720	0	0	0	0	0	0	-1	1	500
	z_j	-1660M	-1555M	-443M	-1154M	-1576M	M	-M	M	-M	M	-M	M	-M	-4370M
	c_j-z_j	-300+1660M	-1000+1555m	-50+443M	-100+1154m	-240+1576M	-M	0	-M	0	-M	0	-M	0	

13 제 2 장 연습문제 중 7 번 문제의 초기심플렉스표를 작성하시오.

<답>

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	i_1	i_2	i_3	i_4	s_1	s_2	s_3	s_4	
기저변수	c_j	-10	-12	-8	-9	10	12	8	9	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	우변항의 값
y_1	10	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	50
x_2	-12	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
x_3	-8	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
x_4	-9	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
s_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	100
s_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	100
s_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	100
s_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	100
	z_j	-10	-12	-8	-9	10	12	8	9	-2	4	-1	9	0	0	0	0	500
	c_i-z_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	-1	-11	0	0	0	0	

14

(a) 심플렉스표를 완성하라.

기저변수	c_j	x_1 10	x_2 40	x_3 25	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
x_3	25	3	0	1	1	−2	0	100
x_2	40	1	1	0	0	2	0	200
s_3	0	−5	0	0	−2	4	1	300
z_j		115	40	25	25	30	0	10500
$c_j - z_j$		−105	0	0	−25	−30	0	

(b) s_1 은 여유변수인가? 혹은 잉여변수인가? <답> 여유변수

(c) 기저변수는 무엇이며 그들의 값은 얼마인가? <답> x_3=100, x_2=200, s_3=300

(d) 비기저변수는 무엇이며 그들의 값은 얼마인가? <답> x_1, s_1, s_2, 이들의 값은 모두 0

(e) 현재의 해가 실행가능해인지 설명하라. <답> 실행가능한 해

(f) 현재의 해는 최적해인가? 만일 최적해이면 속박적 제약식을 찾고 아니면 도입변수와 탈락변수를 결정하라. <답> 최적해, 첫 번째와 두 번째 제약식이 속박적 제약식

15 (a) 초기 심플렉스표를 완성하여라.

기저변수	c_j	x_1 12	x_2 16	x_3 24	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
s_1	0	1	2	0	1	0	0	40
s_2	0	0	3	1	0	1	0	30
s_3	0	2	0	−1/2	0	0	1	15
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		12	16	24	0	0	0	

(b) 위 심플렉스표로부터 선형계획모델을 작성하라.

목적함수 : Maximize (or Minimize) $z = 12x_1 + 16x_2 + 24x_3$

제약조건 : subject to

$$1x_1 + 2x_2 \le 40$$
$$3x_2 + 1x_3 \le 30$$
$$2x_1 - \tfrac{1}{2}x_3 \le 15$$

비음수조건: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

(c) 기저해는 무엇인가? 이는 원점에 해당하는가?

s_1 = 40, s_2 = 30, s_3 = 15 원점에 해당함.

(d) z_1 의 값과 $c_1 - z_1$ 의 값의 의미를 설명하라.

z_1 은 x_1 의 도입비용, $c_1 - z_1$ 은 x_1 의 도입효과

(e) 다음 행연산을 수행하기 위한 도입변수와 탈락변수를 결정하라.

도입변수 x_3, 탈락변수 s_2

(f) 두 번째 심플렉스표를 만들어라.

기저변수	c_j	x_1 12	x_2 16	x_3 24	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
s_1	0	1	2	0	1	0	0	40
x_3	24	0	3	1	0	1	0	30

s_3	0	2	$1\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	30
z_j		0	72	24	0	24	0	720
$c_j - z_j$		12	−56	0	0	−24	0	

16 아래의 초기 심플렉스표를 보고 물음에 답하라.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_2	s_3	s_4	a_4	우변항의 값	도입비율
기저변수	c_j	−5	−12	4	0	0	−M	0	0	−M		
		3	2	−2	1	0	0	0	0	0	28	
		2	4	1	0	−1	1	0	0	0	24	
		0	3	2	0	0	0	1	0	0	12	
		−1	1	2	0	0	0	0	−1	1	42	
z_j												
$c_j - z_j$												

(a) 목적함수 : Maximize (or Minimize) $z = -5x_1 - 12x_2 + 4x_3$

제약조건 : subject to

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 28$$
$$2x_1 + 4x_2 + 1x_3 \geq 24$$
$$3x_2 + 2x_3 \leq 12$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 42$$

비음수조건: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

(b) 초기 심플렉스표를 완성하여라.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_2	s_3	s_4	a_4	우변항의 값	도입비율
기저변수	c_j	−5	−12	4	0	0	−M	0	0	−M		
s_1	0	3	2	−2	1	0	0	0	0	0	28	
a_2	−M	2	4	1	0	−1	1	0	0	0	24	
s_3	0	0	3	2	0	0	0	1	0	0	12	
a_4	−M	−1	1	2	0	0	0	0	−1	1	42	
z_j		−M	−5M	−3M	0	M	−M	0	M	−M	−66M	
$c_j - z_j$		−5+M	−12+5M	4+3M	0	−M	0	0	−M	0		

(c) 기저해는 무엇인가? s_1 = 28, a_2 = 24, s_3=12, a_4=42

(d) 다음 행연산을 수행하기 위한 도입변수와 탈락변수를 결정하라.

도입변수 x_2, 탈락변수 s_3

(e) 두 번째 심플렉스표를 만들어라.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_2	s_3	s_4	a_4	우변항의 값	도입비율
기저변수	c_j	−5	−12	4	0	0	−M	0	0	−M		
s_1	0	3	0	$-3\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	20	
a_2	−M	2	0	$-1\frac{2}{3}$	0	−1	1	$-1\frac{1}{3}$	0	0	8	
x_2	−12	0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	4	
a_4	−M	−1	0	$1\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	−1	1	38	
z_j		−3M	−12	$\frac{1}{3}$M	0	M	−M	$1\frac{2}{3}$M	M	−M	−46M	
$c_j - z_j$		−5+3M	0	$4-\frac{1}{3}$M	0	−M	0	$-1\frac{2}{3}$M	−M	0		

17

기저변수	c_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_3	우변항의 값
		3	2	0	0	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	0	0	28
s_2	0	2	1	0	1	0	0	21
s_3	0	1	0	0	0	1	0	9
s_4	0	0	1	0	0	0	1	13
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		3	2	0	0	0	0	
s_1	0	0	2	1	0	−1	0	19
s_2	0	0	1	0	1	−2	0	3
x_1	3	1	0	0	0	1	0	9
s_4	0	0	1	0	0	0	1	13
z_j		3	0	0	0	3	0	27
$c_j - z_j$		0	2	0	0	−3	0	
s_1	0	0	0	1	−2	3	0	13
x_2	2	0	1	0	1	−2	0	3
x_1	3	1	0	0	0	1	0	9
s_4	0	0	0	0	−1	2	1	10
z_j		3	2	0	2	−1	0	33
$c_j - z_j$		0	0	0	−2	1	0	
s_3	0	0	0	⅓	−⅔	1	0	4⅓
x_2	2	0	1	⅔	−⅓	0	0	11⅔
x_1	3	1	0	−⅓	⅔	0	0	4⅔
s_4	0	0	1	−⅔	⅓	0	1	4/3
z_j		3	2	⅓	1⅓	0	0	37⅓
$c_j - z_j$		0	0	−⅓	−1⅓	0	0	

18 답> 1 개

19

기저변수	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_2	s_3	s_4	a_4	우변항의 값	도입비율
		−5	−12	4	0	0	−M	0	0	−M		
s_1	0	$-\frac{17}{7}$	0	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{88}{7}$	
x_2	−12	$\frac{1}{7}$	1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{22}{7}$	
s_4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	−1	0	
x_3	4	$\frac{5}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{26}{7}$	
z_j		$\frac{8}{7}$	−12	4	0	$\frac{32}{7}$	$-\frac{32}{7}$	$\frac{20}{7}$	0	0	$-\frac{160}{7}$	
$c_j - z_j$		$-\frac{43}{7}$	0	0	0	$-\frac{32}{7}$	$\frac{32}{7}$ −M	$-\frac{20}{7}$	0	−M		

잉여변수 : s_2 와 s_4
속박적 제약식 : 두 번째, 세 번째, 네 번째 제약식

20

답> 기저해 : x_1 = 5, x_4 = 15, x_6 = 10

최적해 아님

기저변수	c_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	우변항의 값
		0	7	1	0	3	1	
x_4	0	0	4	25	1	1	0	15
x_1	0	1	-12	3	0	0	0	5
x_6	-1	0	1	1	0	1	1	10
	z_j	0	-1	-1	0	-1	-1	-10
	$c_j - z_j$	0	8	2	0	-2	0	
x_2	7	0	1	$6\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$3\frac{3}{4}$
x_1	0	1	0	78	3	3	0	50
x_6	-1	0	0	$-5\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$6\frac{1}{4}$
	z_j	0	7	49	2	1	-1	20
	$c_j - z_j$	0	0	-48	-2	-4	0	

21 답> 퇴화해가 발생하였음.

22

답>

기저변수	c_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	우변항의 값
		9	7	5	0	0	0	
x_4	0	3	2	2	1	0	0	600
x_5	0	4	3	2	0	1	0	480
x_6	0	2	1	3	0	0	1	720
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	9	7	5	0	0	0	
x_4	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	240
x_1	9	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	120
x_6	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	1	480
	z_j	9	$6\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{4}$	0	1080
	$c_j - z_j$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{4}$	0	
x_4	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	120
x_1	9	1	$\frac{7}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	5	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	240
	z_j	9	$6\frac{5}{8}$	5	0	$2\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1200
	$c_j - z_j$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$-2\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	
x_4	0	1/7	0	0	1	-4/7	-2/7	120
x_2	7	8/7	1	0	0	3/7	-2/7	0
x_3	5	2/7	0	1	0	1/7	3/7	240
	z_j	9 3/7	7	5	0	3 5/7	1/7	1200
	$c_j - z_j$	-3/7	0	0	0	-3 5/7	-1/7	

보통타이어를 240개씩 생산할 때 최대이익 1,200,000 의 이익을 기대할 수 있음.

23 〈답〉

변수정의 : X_1 ⇒ 보통깡통의 생산량, X_2 ⇒ 고급깡통의 생산량

x_3 ⇒ 아몬드깡통의 생산량, x_4 ⇒ 브라질깡통의 생산량
x_5 ⇒ 필버트깡통의 생산량, x_6 ⇒ 피칸깡통의 생산량
x_7 ⇒ 호두깡통의 생산량

목적함수 : Minimize $z = 500x_1 + 600x_2 + 250x_3 + 400x_4 + 300x_5 + 200x_6 + 350x_7$
제약조건 : subject to

$30x_1 + 40x_2 + 200x_3 \le 6000$ (아몬드의 공급가능량)
$50x_1 + 40x_2 + 200x_4 \le 7500$ (브라질의 공급가능량)
$50x_1 + 40x_2 + 200x_5 \le 7500$ (필버트의 공급가능량)
$20x_1 + 40x_2 + 200x_6 \le 4000$ (피칸의 공급가능량)
$50x_1 + 40x_2 + 200x_7 \le 7500$ (호두의 공급가능량)

비음수조건: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
기저변수	c_j	500	600	250	400	300	200	350	우변항의 값
x_3	250	0.15	0.2	1	0	0	0	0	30
x_4	400	0.25	0.2	0	1	0	0	0	37.5
x_5	300	0.25	0.2	0	0	1	0	0	37.5
x_6	200	0.10	0.2	0	0	0	1	0	20
x_7	350	0.25	0.2	0	0	0	0	1	37.5
z_j		320	300	250	400	300	200	350	50875
$c_j - z_j$		180	300	0	0	0	0	0	
x_3	250	0	0.08	1	-.6	0	0	0	7.5
x_1	500	1	0.8	0	4	0	0	0	150
x_5	300	0	0	0	-1	1	0	0	0
x_6	200	0	0.12	0	-.4	0	1	0	14
x_7	350	0	0	0	-1	0	0	1	0
z_j		500	444	250	1120	300	200	350	79675
$c_j - z_j$		0	156	0	-720	0	0	0	
x_2	600	0	1	12.5	-7.5	0	0	0	93.75
x_1	500	1	0	-10	10	0	0	0	75
x_5	300	0	0	0	-1	1	0	0	0
x_6	200	0	0	-1.5	0.5	0	1	0	2.75
x_7	350	0	0	0	-1	0	0	1	0
z_j		500	600	1700	-50	300	200	350	94300
$c_j - z_j$		0	0	-1450	450	0	0	0	
x_2	600	0	1	-10	0	0	7.5	0	135
x_1	500	1	0	20	0	0	-10	0	20
x_5	300	0	0	-3	0	1	1	0	5.5
x_4	400	0	0	-3	1	0	1	0	5.5
x_7	350	0	0	-3	0	0	1	1	5.5
z_j		500	600	850	400	300	550	350	96775
$c_j - z_j$		0	0	-600	0	0	-350	0	

보통깡통을 20 캔, 고급깡통을 135캔, 브라질깡통, 필버트깡통, 호두깡통을 각 5.5캔씩 생산할 때 일일 판매이익 96,775원을 달성할 수 있음.

제 5 장 연습문제

1 (a) 답> 최적해
(b) 답> 다수최적해
(c) 답> 퇴화해
(d)답> 실행불가능해

(e)답> 무한해

2 아래와 같은 최종 심플렉스표로부터 원래의 선형계획모델을 작성하시오.

(a)답>

기저변수	c_j	x_1 2	x_2 1	x_3 5	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
x_2	1	3	1	0	2	0	3	40
x_3	5	0	0	1	1	0	2	25
s_2	0	1	0	0	−2	1	1	120
	z_j	3	1	5	7	0	13	165
	$c_j - z_j$	−1	0	0	−7	0	−13	
s_1	0	3/2	1/2	0	1	0	3/2	20
x_3	5	−3/2	−1/2	1	0	0	1/2	5
s_2	0	4	1	0	0	1	4	160
	z_j	−7.5	−5/2	5	0	0	5/2	25
	$c_j - z_j$	9.5	7/2	0	0	0	−5/2	
s_1	0	6	2	−3	1	0	0	5
s_3	0	−3	−1	2	0	0	1	10
s_2	0	16	5	−8	0	1	0	120
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	2	1	5	0	0	0	

Maximize $Z = 2x_1 + 1x_2 + 5x_3$
subject to

$$6x_1 + 2x_2 + -3x_3 \le 5$$
$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10$$
$$16x_1 + 5x_2 - 8x_3 \le 120$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(b) 답>

기저변수	c_j	x_1 3	x_2 1	x_3 5	x_4 3	s_1 0	s_2 0	a_1 −M	a_2 −M	우변항의 값
s_1	0	5	3	0	0	1	2	1	−2	40
x_3	5	1½	½	1	0	0	1	½	−1	15
x_4	3	0	⅔	0	1	0	−⅓	0	⅓	8⅓
	z_j	$\frac{15}{2}$	$\frac{9}{2}$	5	3	0	4	$\frac{5}{2}$	−4	100
	$c_j - z_j$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	0	0	−4	$-\frac{5}{2}$−M	−M+4	
s_1	0	2	2	−2	0	1	0	0	0	10
a_1	−M	3	1	2	0	0	2	1	−2	30

x_4	3	0	⅔	0	1	0	$-$⅓	0	⅓	8⅓
z_j		$-$3M	$-$M+2	$-$2M	3	0	$-$2M$-$1	$-$M	2M+1	$-$30M+25
$c_j - z_j$		3+3M	$-$1+M	5+2M	0	0	2M+1	0	$-$2M$-$1	
s_1	0	2	2	$-$2	0	1	0	0	0	60
a_1	$-$M	3	5	2	6	0	0	1	0	80
a_2	$-$M	0	2	0	3	0	$-$1	0	1	25
z_j		$-$3M	$-$1⅔M	$-$2M	$-$M	0	$-$⅓M	$-$M	$-$M	$-$38⅓M
$c_j - z_j$		3+3M	1+1⅔M	5+2M	3+M	0	0	0	0	

Minimize $Z = 3x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad\qquad & \le 60 \\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 & = 80 \\
2x_2 \qquad + 3x_4 & \ge 25 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 &
\end{aligned}
$$

3 답>

기저변수	c_j	x_1 7	x_2 15	x_3 10	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
s_1	0	2	0	2	1	0	0	10
s_2	0	½	2	1	0	1	0	3
s_3	0	1	1	2	0	0	1	7
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		7	15	10	0	0	0	
x_1	7	1	0	1	½	0	0	5
s_2	0	0	2	½	$-$¼	1	0	½
s_3	0	0	1	1	$-$½	0	1	2
z_j		7	0	7	3½	0	0	35
$c_j - z_j$		0	15	3	0	0	0	
x_1	7	1	0	1	½	0	0	5
x_2	15	0	1	¼	$-$⅛	½	0	¼
s_3	0	0	0	¾	$-$⅜	$-$½	1	1¾
z_j		7	15	10¾	1⅝	7½	0	38¾
$c_j - z_j$		0	0	$-$¾	$-$1⅝	$-$7½	0	

(b) 답> $\triangle c_1 > -\frac{3}{4}$

$-3 < \triangle c_2 < 13$

$\triangle c_3 > -\frac{3}{4}$

(c) 답> $-10 \le \triangle b_1 \le 2$

$-\frac{1}{2} \le \triangle b_2 \le 3\frac{1}{2}$

$-1\frac{3}{4} \le \triangle b_3$

(d) 답> 자원 1 의 한계가치 : 1⅝

자원 2 의 한계가치 : 7½

자원 3 의 한계가치 : 0

4 (a)

x_1 x_2 x_3 x_4 a_1 s_1 a_2 s_2

기저변수	c_j	-3	-1	-5	-3	-M	0	-M	0	우변항의 값
a_1	-M	3	1	2	0	1	0	0	0	30
a_2	-M	2	1	3	1	0	-1	1	0	15
s_2	0	0	2	0	3	0	0	0	1	25
z_j		-5M	-2M	-5M	-M	-M	M	M	0	-45M
$c_j - z_j$		-3+5M	-1+2M	-5+5M	-3+M	0	-M	0	0	
a_1	-M	0	$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	0	$7\frac{1}{2}$
x_1	-3	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$7\frac{1}{2}$
s_2	0	0	2	0	3	0	0	0	1	25
z_j		-3	$\frac{1}{2}$M$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$M$-4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$M$-1\frac{1}{2}$	-M	$-1\frac{1}{2}$M$+1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$M$-1\frac{1}{2}$	0	$-7\frac{1}{2}$M$-22\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$		0	$-\frac{1}{2}$M$+\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$M$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$M$-1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$M$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$M$+1\frac{1}{2}$	0	
s_1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	1	-1	0	5
x_1	-3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	10
s_2	0	0	2	0	3	0	0	0	1	25
z_j		-3	-1	-2	0	-1	0	0	0	-30
$c_j - z_j$		0	0	-3	-3	-M+1	0	-M	0	

(b) 답> $\triangle c_1 > 0$
$\triangle c_2 < 1$
$\triangle c_3 < 3$
$\triangle c_4 < 3$

(c) 답> $-7\frac{1}{2} \leq \triangle b_1$
$\triangle b_2 \leq 5$
$-25 \leq \triangle b_3$

(d) <답> 0, 없다.

5 답> 목적함수의 값 z 는 증가할 수 있다. 왜냐하면 만약 첫 번째 제약식이 속박적 제약식일 경우 당연히 우변항의 값이 증가하면 목적함수의 값이 증가할 수 있고 반대로 첫 번째 제약식이 비속박적 제약인 경우에도 두 번째 제약식의 우변항이 증가하면 이는 곧 첫 번째 제약식의 자원사용을 증가시키게 되므로 역시 목적함수의 값 z 도 따라서 증가시킬 수 있게 된다.

6 (a)답> $-250 \leq \triangle b_1$
$-375 \leq \triangle b_2 \leq 500$
$-500 \leq \triangle b_3 \leq 250$

(b)답> $-\frac{1}{20} - \frac{1}{20}\triangle c_3 < 0 \implies \triangle c_3 > -1$
$-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\triangle c_3 < 0 \implies \triangle c_3 > -7$ ==> $0 < \triangle c_3 < 3$
$0 - \frac{2}{5}\triangle c_3 < 0 \implies \triangle c_3 > 0$
$-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\triangle c_3 < 0 \implies \triangle c_3 < 3$

(c) 답> 최적해가 바뀌게 된다.
(d)답> $-\frac{7}{2} + \triangle c_4 < 0 \implies \triangle c_4 < \frac{7}{2}$
(e) 답> 아무런 영향도 미치지 않음

7 <답>
변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 연료첨가제의 생산량(톤)

x_2 ⇒ 용제의 생산량(톤)

목적함수 : Maximize $z = 40000x_1 + 30000x_2$
제약조건 : subject to

$2x_1 + 5x_2 \le 20$ (원료 A 의 사용량)
$2x_2 \le 2$ (원료 B 의 사용량)
$3x_1 + 3x_2 \le 21$ (원료 C 의 사용량)

비음수조건: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

(b) 최적해를 구하라.
답>

기저변수	c_j	x_1 4	x_2 3	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
s_1	0	2	5	1	0	0	20
s_2	0	0	2	0	1	0	2
s_3	0	3	3	0	0	1	21
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
s_1	0	0	3	1	½	−⅔	6
s_2	0	0	2	0	1	0	2
x_1	4	1	1	0	0	⅓	7
	z_j	4	4	0	0	1⅓	28
	$c_j - z_j$	0	−1	0	0	−1⅓	

연료첨가제의 생산량 7톤, 용제의 생산량 0 톤 일 때 판매이익을 최대 280,000 원 달성할 수 있슴.

(c) 답> 현재의 생산계획을 그대로 유지할 수 있는 $\triangle c_1$의 범위는 $\triangle c_1 > -1$ 이므로 연료첨가제의 판매이익이 10000이상 줄어들지 않는 한 현재의 생산계획을 수정할 필요는 없다.
(d) 원료 B의 잠재가격은 얼마인가? 답> 없슴, 0
(e) 답>
연료첨가제 8톤 생산, 용제의 생산량 0 톤 일 때 판매이익을 최대 320,000 원 달성할 수 있슴.
원료 C 의 톤당 잠재가격은 1⅓만 원임

기저변수	c_j	x_1 4	x_2 3	s_1 0	s_2 0	s_3 0	우변항의 값
s_1	0	2	5	1	0	0	20
s_2	0	0	2	0	1	0	2
s_3	0	3	3	0	0	1	24
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
s_1	0	0	3	1	½	−⅔	4
s_2	0	0	2	0	1	0	2
x_1	4	1	1	0	0	⅓	8
	z_j	4	4	0	0	1⅓	32
	$c_j - z_j$	0	−1	0	0	−1⅓	

8 (a) (답> 14만원 이상
(b) 답> $-14 - 11\triangle c_2 < 0 \Longrightarrow \triangle c_3 > -14/11$
$-20 - 19\triangle c_2 < 0 \Longrightarrow \triangle c_3 > -20/19 \qquad \Longrightarrow \quad -20/19 < \triangle c_3 < 1$
$-5 - 3\triangle c_2 < 0 \Longrightarrow \triangle c_3 > -5/3$
$-2 + 2\triangle c_2 < 0 \Longrightarrow \triangle c_3 < 1$

$5\frac{18}{19}$ 만원 이하로 떨어지면 현재의 생산계획은 바뀌게 된다.

(c) 답> $400 - 4\triangle b_1 >$, $\triangle b_1 < 100$

$200 + 3\triangle b_1 > 0$ $\triangle b_1 > -200/3$ ==> $-200/3 < \triangle b_1 < 100$

$10 + 0.1\triangle b_1 > 0$ $\triangle b_1 > -100$

혼합공정이 변할 수 있는 변화범위는 333⅓에서 500 사이

(d)<답> 혼합공정의 잠재가격이 5만 원에 달하므로 4천 원에 혼합공정을 임차하는 것은 바람직하다.

9 아래의 선형계획모델에 대한 쌍대문제를 적어라.

<a> Maximize $Z = -33y_1 + 47y_{21} - 47y_{22}$

subject to

$-18y_1 + 6y_{21} - 6y_{22} \le 4$

$-12y_1 + 4y_{21} - 4y_{22} \le 13$

$y_1,\ y_{21},\ y_{22} \ge 0$

(b) Minimize $Z = 16y_1 + 12y_2$

subject to

$3y_1 + 7y_2 \ge 16$

$-4y_1 + 8y_2 \ge 12$

$8y_1 + 4y_2 \ge 9$

$x_1, x_2, x_3, \ge 0$

<c> Maximize $Z = 15y_{11} - 15y_{12} + 25y_2 - 35y_3$

subject to

$3y_{11} - 3y_{12} + 2y_2 \le 3$

$2y_{11} - 2y_{12} + 2y_2 - 1y_3 \le 1$

$2y_{11} - 2y_{12} + 3y_2 \le 5$

$3y_2 - 4y_3 \le 3$

$y_{11},\ y_{12},\ y_2,\ y_3 \ge 0$

(d) Maximize $Z = -18y_1 + 20y_2 + 28y_{31} - 28y_{32}$

subject to

$-2y_1 + 2y_{31} - 2y_{32} \le -2$

$3y_1 + 2y_2 \le$

3

$-1y_1 + 1y_2 - 3y_{31} + 3y_{32} \le$

4

$1y_1 - 1y_2 + 3y_{31} - 3y_{32} \le$

-4

$y_1,\ y_2,\ y_{31},\ y_{32} \ge 0$

10 답> a> <u>쌍대문제</u>

Maximize $Z = 7y_1 + 4y_2 - 3y_3$

subject to

$5y_1 - 1y_3 \le 7$

$+ 2y_2 + 3y_3 \le 5$

$-3y_1 - 5y_2 \le 1$

$y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0$

답>

기저변수	c_j	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	우변항의 값
		7	4	-3	0	0	0	
s_1	0	5	0	-1	1	0	0	7
s_2	0	0	2	3	0	1	0	5
s_3	0	-3	-5	0	0	0	1	1
z_j		0	0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		7	4	-3	0	0	0	
s_1	0	5	0	-1	1	0	0	7
y_2	4	0	1	$1\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$
s_3	0	-3	0	$7\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	1	$14\frac{1}{2}$
z_j		0	4	6	0	2	0	10
$c_j - z_j$		7	0	-9	0	-2	0	
y_1	7	1	0	-1/5	1/5	0	0	7/5
y_2	4	0	1	$1\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$
s_3	0	0	0	6.9	0	$2\frac{1}{2}$	1	5.95
z_j		7	4	4.6	1.4	2	0	19.8

$c_j - z_j$ 0   0   −7.6   −1.4   −2   0

$y_1 = 1.4,\quad y_2 = 2.5\quad y_3 = 0,$ 목적함수의 값은 19.8
$x_1 = 1.4,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 0,$

b> 쌍대문제
Minimize $Z= 8y_1 + 12y_2$
subject to

$$1y_1 + 3y_2 \ge 2$$
$$2y_1 + 2y_2 \ge -3$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0$$

기저변수	c_j	y_1 −8	y_2 −12	s_1 0	a_1 −M	s_2 0	우변항의 값
a_1	−M	1	3	−1	1	0	2
s_2	0	−2	−2	0	0	1	3
z_j		−M	−3M	M	−M	0	−2M
$c_j - z_j$		−8+M	−12+3M	−M	0	0	
y_2	−12	⅓	1	−⅓	⅓	0	⅔
s_2	0	−1⅓	0	−⅔	⅔	1	4⅓
z_j		−4	−12	4	−4	0	−8
$c_j - z_j$		−4	0	−4	−M−4	0	

$y_1 = 0,\quad y_2 = ⅔$ 목적함수의 값은 8
$x_1 = 4,\quad x_2 = 0$

11 다음은 어떤 선형계획문제의 쌍대문제이다. 원문제를 적어라.

답>

Minimize $Z= -16y_1 + 30y_2$
subject to

$$-2y_1 + 4y_2 \ge 3$$
$$1y_1 + 3y_2 \ge 1$$
$$-2y_1 + 4y_2 \ge 7$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0$$

Minimize $Z= 28y_1 + 65y_2$
subject to

$$3y_1 + 14y_2 \ge 6$$
$$-4y_1 + 7y_2 \ge 8$$
$$8y_1 + 4y_2 \ge 4$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0$$

답>

Maximize $Z= 7y_1+4y_{21}-4y_{22}-2y_3$
subject to

$$2y_1+5y_{21}-5y_{22}-1y_3 \le 4$$
$$4y_1-1y_{21}+1y_{22}-2y_3 \le 1$$
$$-4y_1+1y_{21}-1y_{22}+2y_3 \le -1$$
$$y_1,\ y_{21},\ y_{22},\ y_3 \ge 0$$

Maximize $Z= 30y_1+24y_2+48y_3$
subject to

$$1y_1+2y_2+3y_3 \le 3$$
$$1y_1+3y_2+2y_3 \le 1$$
$$1y_1+3y_2+4y_3 \le 5$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0$$

12 (a) Minimize $Z= -2y_1 + 1y_2$
subject to

$$-1y_1 + 1y_2 \ge -1$$
$$1y_1 - 1y_2 \ge 2$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0$$

(b) 답> 실행불가능함.

(c) 답> 실행불가능함

13 답> $x_1 = 1/7$, $x_2 = 24/7$ $z = 26/7$

(b) 각 제약식의 여유변수의 값은 얼마인가?

답 첫 번째 제약식 0
두 번째 제약식 0
세 번째 제약식 7

(c) 답> Minimize $Z = 12y_1 + 3(y_{21} - y_{22}) + 10y_3$

subject to

$$12y_1 - 3(y_{21} - y_{22}) \geq 2$$
$$3y_1 + (y_{21} - y_{22}) + y_3 \geq 1$$
$$y_1,\ y_{21},\ y_{22},\ y_3 \geq 0$$

먼저 원문제의 두 변수 x_1, x_2 의 값은 쌍대문제의 두 제약식의 잠재가치와 같으므로 쌍대문제의 두 제약식은 속박적 제약식이 된다. 따라서

$$12y_1 - 3(y_{21} - y_{22}) = 2$$
$$3y_1 + (y_{21} - y_{22}) + y_3 = 1$$

이 된다. 또 원문제에서 세 번째 제약식의 여유값이 7 이므로 잠재가격은 0 이다 따라서 쌍대문제에서 대응되는 변수인 y_3 의 값은 0 이 되므로 위 수식은 아래와 같이 정리되어 $y_1 = 5/21$, $(y_{21} - y_{22}) = 2/7$ 이 된다.

$$12y_1 - 3(y_{21} - y_{22}) = 2$$
$$3y_1 + (y_{21} - y_{22}) = 1$$

y_{21} 과 y_{22} 는 비음수조건을 만족시켜야하고 이 두 변수중 하나는 0 이 되어야 하므로 이를 만족시키는 y_{21} 과 y_{22} 의 값은 각각 $y_{21} = 2/7$, $y_{22} = 0$ 가 된다.

주어진 쌍대문제의 변수의 값은 $y_1 = 5/21$, $y_{21} = 2/7$, $y_{22} = 0$, $y_3 = 0$ 이 된다. 이때 목적함수의 값은 26/7이 된다.

(d) 답>

		y_1	y_{21}	y_{22}	y_3	a_1	s_1	
기저변수	c_j	-12	-3	3	-10	-M	0	우변항의 값
a_1	-M	12	-3	3	0	1	-1	2
y_3	-10	3	1	-1	1	0	0	1
z_j		-12M-30	3M-10	-5M+10	-10	-M	M	-2M-10
$c_j - z_j$		12M+18	-3M+7	5M-7	0	0	-M	
y_1	-12	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1/12	-1/12	1/6
y_3	-10	0	$1\frac{3}{4}$	$-1\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
z_j		-12	-14.5	14.5	-10	1.5	-1.5	-7
$c_j - z_j$		0	11.5	-11.5	0	$-M-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	
y_1	-12	1	0	0	1/7	1/21	-1/21	5/21
y_{21}	-3	0	1	-1	4/7	-1/7	1/7	2/7
z_j		-12	-3	3	-24/7	-1/7	1/7	-26/7
$c_j - z_j$		0	0	0	-46/7	-M+1/7	-1/7	

14 (a) 답> $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, 첫 번째 제약식 비속박적(=>쌍대변수 = 0), 두 번째제약식 속박적 (쌍대변수 > 0), 세 번째 제약식 비속박적 (쌍대변수 = 0), 네 번째 제약식 속박적 (쌍대변수 > 0), $z = 22$

(b) 답> Minimize $Z = -12y_1 + 8y_2 - 9y_3 - 2y_4$

subject to

$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 4$$
$$-3y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 1y_4 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

(c) $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ 두 제약식 모두 속박적 제약식이므로 아래의 연립방정식을 풀어 y_2, y_4 의 값을 구하면 $y_2 = 4$, $y_4 = 5$ 이 된다. 그리고 목적함수의 값 z 는 22가 된다.

$$y_2 = 4$$
$$2y_2 - 1y_4 = 3$$

15 (a) 답> $x_1 = 2, x_2 = 6$, z = 40
(b) 답> $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$
(c) 답> $-8 < \triangle c_1 < 4$
$-4 < \triangle c_2$
(d) $-4 < \triangle b_1 < 8$
$-8 < \triangle b_2 < 4$
$-4 < \triangle b_3$

16 (a)답> 첫 번째와 세 번째
(b) 답> 첫 번째 제약식 : $\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_2$
두 번째 제약식 : 0
세 번째 제약식 : $\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_1$
(c) $-4 < \triangle b_1 < 28$
$-4 < \triangle b_2$
$-8 < \triangle b_3 < 6$
(d) 답> $x_1 = 6$, $x_2 = 7$ $z = 6c_1 + 7c_2$

17 (a) 답> $x_1 = 0, x_2 = 18.57$, $x_3 = 15.72$, z = 1528.6, 또 다른 최적해는 없다.
(b)답> 자원 2의 한계가치 = 22.5, -27.58 ~ 45.64
(c)답> 60.8
(d)답> 아무런 영향을 미치지 못함
(e) 답> $y_1 = 3.7$, $y_2 = 22.5$, $y_3 = 0$
(f) 답> $-14.21 < \triangle c_2 < 150$
(g) 답> 유익하지 않음

18 (a) 답> Minimize $Z = 20y_1 + 20y_2$
subject to

$$2y_1 + 3y_2 \geq 30$$
$$1y_1 + 2y_2 \geq 35$$
$$1y_1 + 3y_2 \geq 20$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

(b) 답> 쌍대문제(최소화)문제는 큰 값에서 작은값으로, 원문제(최대화)는 0 (원점)에서 큰 값으로 진행해나아가다가 서로 최적해에서 만나게 된다. 따라서 (10,15) 이 쌍대문제의 실행가능한 해라면 이 때의 값 500은 현재의 해가 최적해가 아닌 이상 원문제로부터 달성될 수 없는 값이 된다. 따라서 원문제의 해는 이보다 작거나 같게 되므로 원문제의 최적해는 500울 넘을 수 없게된다.
(c) 답> $s_1 = 20/3$, $x_1 = 20/3$
(d)답> 원문제에서
$s_1 = 20/3$ ==> 첫 번째 제약식 비속박적 ==> 잠재가격 = 0 ==> 해당 쌍대변수 $y_1 = 0$,
$x_1 = 20/3$ ==> 쌍대문제의 첫 번째 제약식의 잠재가격 > 0 ==> 해당 제약식은 속박적 ==> $2y_1 + 3y_2 = 30$

위 두 조건에서 y_1 = 0, y_2 = 10을 계산해 낼 수 있다. 하지만 이 값은 쌍대문제의 두 번째 제약조건을 만족시키지 못하므로 해당 쌍대문제는 실행가능해가 아님을 알수있게 된다.

(e) 그래프를 이용하여 쌍대문제를 풀어라. 그리고 쌍대문제의 최적해과 원문제-쌍대문제의 관계를 이용하여 원문제의 변수의 값(x_1, x_2, x_3)을 구하라.

답> y_1 = 0, y_2 = 17.5, z = 350 , 두 번째 제약식만 속박적, 나머지 비 속박적
따라서 원문제의 두 번째 제약식은 속박적(왜냐하면 y_2 가 0 보다 크므로) 제약식이고 x_1 과 x_3의 값은 0 이 된다.(왜냐하면 쌍대문제에서 해당 변수의 제약식이 비속박적 제약식 즉, 잠재가격이 0 이므로)
이를 종합하면, 2 x_2 = 20, x_2= 10 이되고 이때의 원문제의 목적함수의 값도 350이 된다.

(f) 원문제를 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구한 후 (e)에서 구한 해와 같아짐을 확인하라.

답>

기저변수	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	우변항의 값
		30	35	20	0	0	
s_1	0	2	1	1	1	0	20
s_2	0	3	2	3	0	1	20
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		30	35	20	0	0	
s_1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$1	1	$-\frac{1}{2}$	10
x_2	35	$1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	10
z_j		52.5	35	52.5	0	17.5	350
$c_j - z_j$		−22.5	0	−32.5	0	−17.5	

19 K 군은 여름방학 10주간을 어떻게 이용할 것인지에 대하여 생각하고 있다. 막노동을 할 경우 일주일에 100,000 원을 벌 수 있고 대기업의 인턴사원으로 근무하면 1주일에 40,000원, 아버지를 도와드릴 경우 1 주일에 20,000 원을 벌 수 있다. 또는 일부는 막노동을, 일부는 인턴사원으로 근무할 수도 있다. K 군은 스스로 판단해서 10 점 만점을 기준으로 만족도를 계산했는 데 막노동을 할 경우 만족도는 일주일에 2 점, 인턴사원으로 근무할 경우 일주일에 6 점, 아버지를 도와드릴 경우 일주일에 8 점으로 평가하였다. 그런데 K 군이 방학동안에 다음 학기 등록금 50만 원을 꼭 벌어야 한다. K 군은 만족도의 합이 최대가 되도록 여름방학 이용계획을 세우고자 한다. 아래의 물음에 답하라.

(a) 이 문제를 변수가 3 개 있는 선형계획모형으로 정식화하라.

<답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 막 노동시간(주)
$x_2 \Rightarrow$ 인턴사원으로 일한 시간(주)
$x_3 \Rightarrow$ 친구와 어울린 시간(주)

목적함수 : Maximize $z = 2x_1 + 6x_2 + 10x_3$
제약조건 : subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$
$$10x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(b) 이 선형계획모형을 변수가 2 개만 있는 모형으로 고쳐라. 이 문제를 그래프를 이용하여 최적해를 구한 후 (a) 의 최적해를 구해보라.

답> Minimize Z= 10 y_1 - 50 y_2
subject to

$$1\,y_1 - 10\,y_2 \ge 2$$
$$1\,y_1 - 4\,y_2 \ge 6$$
$$1\,y_1 - 2\,y_2 \ge 10$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

y_1 = 10, y_2=0, z = 100, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 10, z = 100

20 한 가구회사에서는 4 종류의 책상을 생산하고 있다. 이들 4 종류의 책상은 목공실을 거쳐서 마무리실을 지남으로써 완성되는데 각 종류의 책상 한 개를 처리하는 데 필요한 인력은 다음과 같다.

작업실 \ 책상	책상 A	책상 B	책상 C	책상 D
목 공 실	7	9	4	5
마 무 리 실	4	1	1	8

다음 달에 각 작업실에서 동원할 수 있는 노동력은 목공실이 3,000 시간, 마무리실이 2,000 시간이다. 각 책상을 한 개 판매하여 얻는 이익은 제품 A, B, C, D 가 각각 12(천원), 20(천원), 18(천원), 40(천원)이다. 생산된 책상은 모두 판매될 수 있다고 할 때 아래의 물음에 답하라.

(a) 최적생산계획을 수립할 수 있는 선형계획모델을 제시하라.

<답>

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 책상 A의 생산량

$x_2 \Rightarrow$ 책상 B의 생산량

$x_3 \Rightarrow$ 책상 C의 생산량

$x_4 \Rightarrow$ 책상 D의 생산량

목적함수 : Maximize $z = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$

제약조건 : subject to

$$7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 3000$$
$$4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 8x_4 \le 2000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

(b) (a)에서 주어진 선형계획모델을 쌍대문제로 바꾸어라.

답> Minimize $Z = 3000\,y_1 + 2000\,y_2$

subject to

$$7\,y_1 + 4\,y_2 \ge 12$$
$$9\,y_1 + 1\,y_2 \ge 20$$
$$4\,y_1 + 1\,y_2 \ge 18$$
$$5\,y_1 + 8\,y_2 \ge 40$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

(c) (b)의 쌍대문제를 그래프를 통해 풀어서 주어진 문제의 최적해를 구하라.

답> y_1 = 104/27, y_2=70/27, z = 16740 20/27, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 14000/27, x_4 = 5000/27, z = 16740 20/27

(d) 어떤 가구 소비업자에게 제품 A, B, C, D 를 각각 30, 15, 6, 8 개를 공급하기로 계약하였다면 이 선형계획모형은 어떻게 수정되어야 하는가? 그래프를 이용하여 최적해를 구하라.

답> 최적해에서 제품 A, B의 생산량은 0 이었지만 수정된 공급계약에의해 적어도 책상 A 30 개와 책상 B 15개를 생산해야되므로 주어진 선형계획모델을 아래와 같이 바꿀 수 있다.

목적함수 : Maximize $z = 660 + 18x_3 + 40x_4$

제약조건 : subject to

$$345 + 4x_3 + 5x_4 \le 3000$$
$$135 + 1x_3 + 8x_4 \le 2000$$
$$x_3, x_4 \ge 0$$

위 선형계획문제를 풀면 x_3 = 177 26/27, x_4 = 441 71/270, z = 21515 5/27 이 된다.

21 (a)<답>

변수정의 : x_{11} ⇒ 정보통신산업의 투자금액(국내자본)
x_{12} ⇒ 정보통신산업의 투자금액(해외자본)
x_{21} ⇒ 전자산업의 투자금액(국내자본)
x_{22} ⇒ 전자산업의 투자금액(해외자본)
x_{31} ⇒ 농업의 투자금액(국내자본)
x_{32} ⇒ 농업의 투자금액(해외자본)
x_{41} ⇒ 자동차산업의 투자금액(국내자본)
x_{42} ⇒ 자동차산업의 투자금액(해외자본)

목적함수 : Maximize $z = 1.2x_{11} + 2.6x_{12} + 3.5x_{21} + 2.1x_{22} + 1.7x_{31} + 2.9x_{32} + 2.6x_{41} + 0.4x_{42}$
제약조건 : subject to

$$x_{11} + x_{12} \le 15$$
$$x_{21} + x_{22} \le 30$$
$$x_{31} + x_{32} \le 20$$
$$x_{41} + x_{42} \le 40$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 20$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 50$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42} \ge 0$$

(b) 최적해를 구하라

답> 위 문제를 수송문제로 바꾼 다음 징검다리법을 이용하여 각 변수의 값을 구하면 아래와 같다.
x_{11}=0, x_{12}=15, x_{21}=15, x_{22}=15, x_{31}=0, x_{32}=20, x_{41}=5, x_{42}=0, z = 194

(c) 국내자본이 21억 불로 증가하였다고 하자. 이 때의 최적해를 구하고 목적함수의 증가량을 구하라.
답> 2.6
(d) 외국자본이 51억 불로 1억 불 증가할 때 최적해와 목적함수의 증가량을 구하라.
답> 1.2
(e) 4 개의 사업에서 최소한 각각 20, 60, 40, 50 (억 불/年) 수준의 산출을 얻어야만 할 때 최적해를 구하라.
답>
목적함수 : Maximize $z = 1.2x_{11} + 2.6x_{12} + 3.5x_{21} + 2.1x_{22} + 1.7x_{31} + 2.9x_{32} + 2.6x_{41} + 0.4x_{42}$
제약조건 : subject to

$$x_{11} + x_{12} \le 15$$
$$x_{21} + x_{22} \le 30$$
$$x_{31} + x_{32} \le 20$$
$$x_{41} + x_{42} \le 40$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 20$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 50$$
$$1.2x_{11} + 2.6x_{12} \ge 20$$
$$3.5x_{21} + 2.1x_{22} \ge 60$$
$$1.7x_{31} + 2.9x_{32} \ge 40$$
$$2.6x_{41} + 0.4x_{42} \ge 50$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42} \ge 0$$

x_{11}=0, x_{12}=2.71, x_{21}=.77, x_{22}=27.29, x_{31}=0, x_{32}=20, x_{41}=19.23, x_{42}=0, z = 175.05

제 6 장 연습문제

1 다음과 같은 수송표가 주어졌을 때 물음에 답하라.

(a) 서북코너법에 의하여 초기해를 찾아라.

수요지 공급지	서 울		부 산		공급합계
구 미	300	8		6	300
인 천	200	5		6	200
창 원	100	7	200	10	300
수요합계	600		200		800

(b) 보겔의 방법에 의하여 초기해를 찾아라.

수요지 공급지	서 울		부 산		공급합계
구 미	100	8	200	6	300
인 천	200	5		6	200
창 원	300	7		10	300
수요합계	600		200		800

(c) 서북코너법에 의한 최초해로부터 징검다리법에 따라 최적해를 구하라.

수요지 공급지	서 울		부 산		공급합계
구 미	100	8	200	6	300
인 천	200	5		6	200
창 원	300	7		10	300
수요합계	600		200		800

(d) 보겔법에 의한 최초해로부터 수정배분법에 따라 최적해를 구하라.

$u_1 + v_1 = 8$
$u_1 + v_2 = 6$
$u_2 + v_1 = 5$
$u_3 + v_1 = 7$
$u_1 = 0, \quad v_1 = 8, \quad v_2 = 6, u_2 = -3, u_3 = -1$

$e_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 6 - (-3) - 6 = 3$

$e_{23} = c_{23} - u_3 - v_2 = 10 - (-1) - 6 = 5$

(e) 이 수송문제를 선형계획모델로 나타내어라.

$$Minimize \quad 8x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 6x_{22} + 7x_{31} + 10x_{32}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} \leq 300$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200$$
$$x_{31} + x_{32} \leq 300$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0$$

2 다음과 같이 수송표가 주어졌을 때 물음에 답하라.

(a) 서북코너법에 의하여 초기해를 찾아라.

공급지 \ 수요지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**100**	5		2		3	100
인 천	**200**	8	**100**	4		3	300
창 원		9	**100**	7	**200**	5	300
수요합계	300		200		200		700

(b) 보겔의 방법에 의하여 초기해를 찾아라.

수요지 / 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**100**	5		2		3	100
인 천		8	**200**	4	**100**	3	300
창 원	**200**	9		7	**100**	5	300
수요합계	300		200		200		700

(c) 서북코너법에 의한 최초해로부터 징검다리법에 따라 최적해를 구하라..

수요지 / 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미		5	**100**	2		3	100
인 천		8	**100**	4	**200**	3	300
창 원	**300**	9		7		5	300
수요합계	300		200		200		700

(d) 보겔법에 의한 최초해로부터 수정배분법에 따라 최적해를 구하라.

위 (c)의 답 참조

(e) 구미- 대구 수송로에 100 단위를 수송하고 싶다면 최적해에 어떤 변화가 있을까?

답> 수송비 증가

3 다음과 같은 수송표가 주어졌을 때 최적해를 구하라.

답>

수요지 / 공급지	서 울		부 산		대 구		광 주		공급합계
구 미		80	**4**	70	**3**	50	**17**	60	24
인 천	**20**	60		90	**10**	40		80	30
마 산		50	**16**	50		95		90	16
수요합계	20		40		13		17		70 / 90

4 (a) 위 문제 3에서 보겔법을 사용하여 초기해를 구하라.

수요지 / 공급지	서 울		부 산		대 구		광 주		공급합계
구 미		80	7	70		50	17	60	24
인 천	17	60		90	13	40		80	30
마 산	3	50	13	50		95		90	16
가상공급		0	20	0		0		0	20
수요합계	20		40		13		17		90 / 90

(b) 수정배분법에 의하여 최적해를 구하라.

답> 3 번 문제 해답 참조

5 위 문제 3에서 구미-부산 수송로와 인천-대구 수송로에 수송이 금지되었다면 최적해는 어떻게 변하는가?

답>

수요지 / 공급지	서 울		부 산		대 구		광 주		공급합계
구 미		80		M	13	50	11	60	24
인 천	20	60	4	90		M	6	80	30
마 산		50	16	50		95		90	16
수요합계	20		40		13		17		70 / 90

6 다음과 같이 수송표가 주어졌을 때 물음에 답하라.

(a) 서북코너법에 의하여 초기해를 찾아라.

수요지 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**50**	4		5		7	50
인 천		6	**45**	3	**5**	8	50
마 산		3		2	**50**	3	60
수요합계	50		45		55		160 150

(b) 보겔의 방법에 의하여 초기해를 찾아라.

수요지 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**40**	4		5		7	50
인 천	**5**	6	**45**	3		8	50
마 산	**5**	3		2	**55**	3	60
수요합계	50		45		55		160 150

(c) 서북코너법에 의한 최초해로부터 징검다리법에 따라 최적해를 구하라.

수요지 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**50**	4		5		7	50
인 천		6	**40**	3	**5**	8	50
마 산		3	**5**	2	**55**	3	60
수요합계	50		45		55		160 150

(d) 보겔법에 의한 최초해로부터 수정배분법에 따라 최적해를 구하라.

수요지 \ 공급지	서 울		부 산		대 구		공급합계
구 미	**45**	4		5		7	50
인 천		6	**45**	3		8	50
마 산	**5**	3		2	**55**	3	60
수요합계	50		45		55		160 / 150

(e) 구미-대구 수송로에 반드시 30 단위를 수송해야 할 때 최적해는 어떻게 변할까?
답> 구미-대구 수송로를 기준으로 loop를 구성한 후 구미-대구 수송로에 30을 할당하고 구미-서울 수송로 30 감소, 마산-서울 수송로 30 증가, 마산-대구 수송로에 30을 증가시키면 된다.

(f) (e) 를 고려한 수송문제를 선형계획모델로 나타내어라.

$$Minimize \quad 4x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+6x_{21}+3x_{22}+8x_{23}+3x_{31}+2x_{32}+3x_{33}$$

s.t.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 50$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 50$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 60$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 50$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} = 45$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33} = 55$$
$$x_{13} \ge 30$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \ge 0$$

7 (a) 이 해는 기저해인가? 답> 기저해임

(b) 이 해가 최적해인지 확인하고 아니면 최적해를 구하라. 답> 최적해

(c) 원래의 수송문제를 선형계획모델로 작성하라.

$$Minimize \quad 9x_{11}+8x_{12}+12x_{13}+13x_{14}+10x_{21}+10x_{22}+12x_{23}+14x_{24}+8x_{31}+9x_{32}+11x_{33}+12x_{34}+10x_{41}+10x_{42}+11x_{43}+12$$

s.t.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 18$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 24$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \le 6$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} \le 12$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 6$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 14$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 35$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 5$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \geq 0$$

(d) 만일 c_{43} 이 11 에서 17 로 증가했다고 하자. 최적해는 변하는가? 답> 변한다.

(e) 모든 수송비용 c_{ij}에 10 을 더했다고 하자. 현재의 해가 최적해인가? 답> 최적해임

(f) 모든 수송비용 c_{ij}에 10 을 곱했다고 하자. 현재의 해가 최적해인가? 답> 최적해임

8 다음의 수송표로 표시된 수송문제를 생각해보자. 단 표 안의 숫자는 단위수송비이다.

(a) 수송계획표를 만들어라.

수요지 \ 공급지	C	D	D	공급합계
A	16	12	14	600
B	10	13	20	200
수요합계	300	200	300	800 / 800

(b) 이 문제를 선형계획모형으로 정식화하여라.

$$Minimize \quad 16x_{11}+12x_{12}+14x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+20x_{23}$$

s.t.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 600$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 200$$
$$x_{11}+x_{21} = 300$$
$$x_{12}+x_{22} = 200$$
$$x_{13}+x_{23} = 300$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0$$

(c) 공급지 B 의 공급가능량이 300 으로 수정되었다. 이 문제를 선형계획모델로 바꾸어라. $Minimize \quad 16x_{11}+12x_{12}+14x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+20x_{23}$

s.t.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 600$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 300$$
$$x_{11}+x_{21} = 300$$
$$x_{12}+x_{22} = 200$$
$$x_{13}+x_{23} = 300$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0$$

(d) 수요지 C 의 수요량이 100 으로 수정되었다. 이 문제를 선형계획모델로 바꾸어라.

$$Minimize \quad 16x_{11} + 12x_{12} + 14x_{13} + 10x_{21} + 13x_{22} + 20x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 600$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 200$$
$$x_{11} + x_{21} = 300$$
$$x_{12} + x_{22} = 200$$
$$x_{13} + x_{23} = 100$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0$$

9

$$Minimize \quad 2235x_{11} + 2220x_{12} + 2250x_{13} + 2245x_{14} + 2220x_{15} + 2360x_{21} + 2345x_{22} + 2320x_{23} + 2330x_{24} + 2355x_{25}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 5000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 7000$$
$$x_{11} + x_{21} = 2000$$
$$x_{21} + x_{22} = 3000$$
$$x_{31} + x_{33} = 1000$$
$$x_{41} + x_{42} = 2000$$
$$x_{51} + x_{52} = 4000$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}, x_{51}, x_{52} \geq 0$$

10

$$Minimize \quad 7x_{11} + 5x_{12} + 12x_{13} + 11x_{14} + 9x_{15} + 13x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 8x_{25} + 7x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 14x_{35}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 400$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 350$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 100$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 400$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$

11 (a).

$$Minimize \quad 14x_{11} + 11x_{12} + 7x_{13} + 10x_{21} + 15x_{22} + 19x_{23} + 7x_{31} + 17x_{32} + 13x_{33}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 300$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 400$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 400$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 400$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

(b) 답> 위 선형계획모델에서 두 번째 제약식이 아래와 같이 바뀌게 된다.

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 500$$

12 아래의 수송표를 참고한 후 물음에 답하라.

(a) 답> 최적해, 총 수송비 = 1820

(b) 답> 할당되지 않은 수송로 중 만약 선택된다고 할 때 수송비절감효과가 가장 큰 수송로를 선택하는 것

(c) 답> 새롭게 할당될 수송로(loop)가 결정되었을 때 해당 루프안에서 줄어드는 수송량 중 최소값이 새로운 수송로에 할당되는 것

13 (a)

$$Minimize \quad 16x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 20x_{14} + 17x_{21} + 15x_{22} + 14x_{23} + 19x_{24}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 3000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 2000$$
$$x_{11} + x_{21} = 1000$$
$$x_{12} + x_{22} = 2000$$
$$x_{13} + x_{23} = 2000$$
$$x_{14} + x_{24} = 1000$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0$$

(b) 이 문제를 수송계획표로 바꾸어라.

수요지 \ 공급지	부　산	마　산	대　전	대　구	공급합계
영　동	16	17	16	20	3000
양　산	17	15	14	19	2000
가　상	0	0	0	0	1000
수요합계	1000	2000	2000	1000	6000

(c) 보겔의 방법과 수정배분법을 이용하여 생산계획을 수립하라.

수요지 \ 공급지	부　산	마　산	대　전	대　구	공급합계
영　동	1000 　16	2000 　17	16	20	3000
양　산	17	0 　15	2000 　14	19	2000
가　상	0	, , 0 　0	0	1000 　0	1000
수요합계	1000	2000	2000	1000	6000

$u_1 + v_1 = 16$
$u_1 + v_2 = 17$
$u_2 + v_2 = 15$
$u_2 + v_3 = 14$
$u_3 + v_2 = 0$
$u_3 + v_4 = 0$
$u_1 = 0,\ v_1 = 16,\ v_2 = 17, u_2 = -2,\ v_3 = 16,\ u_3 = -17,\ v_4 = 17$
$e_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 16 - (0) -16 = 0$
$e_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 20 - (0) -17 = 3$
$e_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 17 - (-2) -16 = 3$
$e_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 19 - (-2) -17 = 0$
$e_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - (-17) -16 = 1$
$e_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 0 - (-17) -16 = 1$

제 7 장 연습문제

1

답> 작업 A ==> 기계 2
작업 B ==> 기계 1
작업 C ==> 기계 3

2

(a) 판매이익이 최대가 되는 최적할당방법을 찾아라.

답> 판매원 A ==> 지역 1
판매원 B ==> 지역 2
판매원 C ==> 지역 5
판매원 D ==> 지역 4
판매원 E ==> 지역 3

(b) 판매요원 C 는 지역 5 에 파견될 수 없을 때 최적할당방법은 어떻게 바뀌는가?

답> 판매원 A ==> 지역 1
판매원 B ==> 지역 2
판매원 C ==> 지역 4
판매원 D ==> 지역 5
판매원 E ==> 지역 3

(c) 주어진 할당문제를 해결할 수 있는 선형계획모델을 작성하라.

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & 16x_{11}+24x_{12}+10x_{13}+12x_{14}+9x_{15}+31x_{21}+27x_{22}+30x_{23}+14x_{24}+16x_{25}+15x_{31}+18x_{32}+16x_{33}+25x_{34}+30x_{35} \\ & + 17x_{41}+12x_{42}+21x_{43}+30x_{44}+25x_{45}+20x_{51}+19x_{52}+25x_{53}+16x_{54}+10x_{55} \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{array}{lll} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} \le 1 & : & \text{판매원 A} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} \le 1 & : & \text{판매원 B} \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} \le 1 & : & \text{판매원 C} \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45} \le 1 & : & \text{판매원 D} \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55} \le 1 & : & \text{판매원 E} \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} = 1 & : & \text{지역 1} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} = 1 & : & \text{지역 2} \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} = 1 & : & \text{지역 3} \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54} = 1 & : & \text{지역 4} \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55} = 1 & : & \text{지역 5} \end{array}$$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55} \geq 0$

(d) 만약 위 표의 값이 기회손실을 나타낸다고 할 때 이를 최소화시킬 수 있는 할당방법을 찾아라.

답>　판매원 A ==> 지역 3
판매원 B ==> 지역 4
판매원 C ==> 지역 1
판매원 D ==> 지역 2
판매원 E ==> 지역 5

3 아래와 같은 비용표를 갖는 할당문제에서

(a) 헝가리법을 이용하여 최적할당방법을 구하라.

답> A ==> 2, B ==> 4, C ==> 3, D ==> 1,

(b) 아래의 표가 이익을 나타낸다고 할 때 총이익을 최대로 할 수 있는 할당방법을 찾으라.

답> A ==> 1, B ==> 2, C ==> 4, D ==> 3,

4

답>　하청업자 1 ==> 프로젝트 5
하청업자 2 ==> 프로젝트 2
하청업자 3 ==> 프로젝트 1
하청업자 4 ==> 프로젝트 3
하청업자 5 ==> 프로젝트 4

5 어떤 세일즈맨이 지역 1 을 출발해서 아래와 같은 지역을 방문하고 다시 지역 1 로 돌아와야 되는 경우 최적의 방문로를 분기탐색법을 이용하여 구하라.

(단위:분)

단 계 1 :

마 디 1
순회 1 : 2-4-7-5-2
순회 2 : 1-6-3-1
최소값 : 669
분 기

상한값:755
하한값:669

단 계 2 : 지역 6 - 지역 3 폐쇄 / 지역 1 - 지역 6 폐쇄 / 지역 3 - 지역 1 폐쇄

마 디 2
순회 1 : 1-3-1
순회 2 : 2-4-7-2
순회 3 : 5-6-5
최소값 : 679

마 디 3
순회:1-2-4-7-5-6-3-1
최소값 : 676

마 디 4
순회:1-2-4-7-5-6-3-1
최소값 : 681

상한값:676
하한값:676

답> 1-2-4-7-5-6-3-1 의 총비용 676

제 8 장 연습문제

1 그래프를 이용하여 다음 순수정수계획문제의 최적해를 찾아라.

(a)

답> x_1 = 2, x_2= 0, z = 6

(b)

답> x_1 = 3, x_2= 6, z = 39

(c)

답> x_1 = 6, x_2= 6, z = 42

(d)

답> x_1 = 1, x_2= 1, z = 3.6

2 그래프를 이용하여 다음 혼합정수계획문제의 최적해를 찾아라.

(a)

답> x_1 = 2⅓, x_2= 0, z = 9⅓

(b)

답> x_1 = 73⅓, x_2= 120, z = 1040

(c)

답> x_1 = 21.5, x_2= 76, z = 4065

(d)

답> x_1 = 15, x_2= 2.5, z = 510

3 분기탐색법을 이용하여 다음 순수정수계획문제의 최적해를 찾아라.

(a) 답> x_1 = 3, x_2= 2, z = 7

(b) 답> x_1 = 3, x_2= 2, z = 17

4 분기탐색법을 이용하여 다음 혼합정수계획문제의 최적해를 찾아라.

(a) 답> x_1 = 0, x_2= 2⅓, z = 7

(b) 답> x_1 = 3, x_2= 2, z = 7

5

답> x_1 = 6, x_2= 0, z = 60

6 아래와 같이 혼합정수계획문제가 주어졌을 때

(a) 그래프에 의하여 최적해를 구하라.

(b) 분기탐색법에 의해 최적해를 구하라.

답> x_1 =5 , x_2= 0.8, z = 16.6

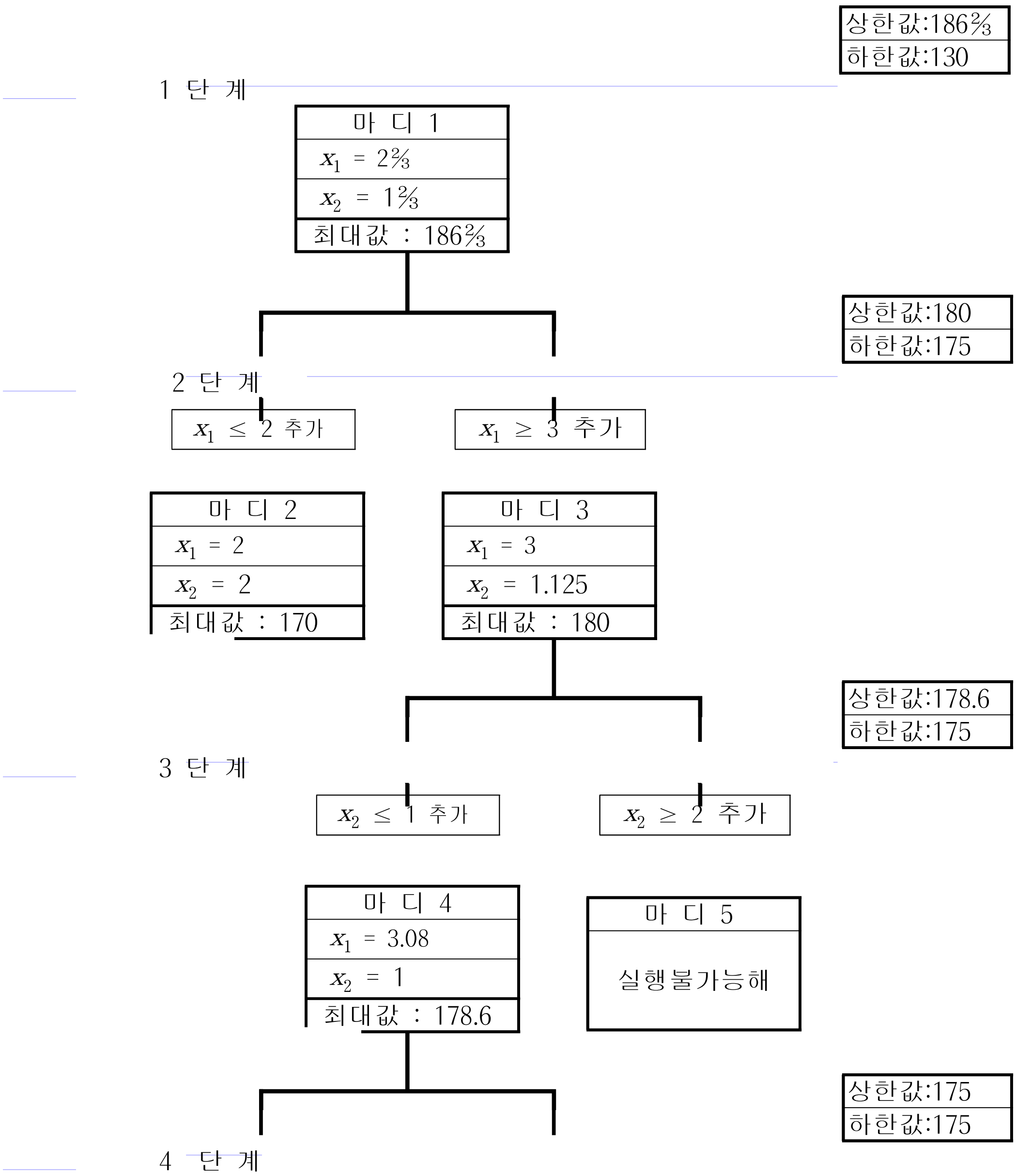
7 (a) 정수조건을 무시한 선형계획모델의 최적해를 그래프를 이용하여 구하라.

답> x_1 =1 , x_2= 5.4, z = 354

(b) 그래프를 이용하여 정수계획모델의 최적해를 구하라.

답> x_1 =3 , x_2= 4, z = 330

(c) 분기탐색법을 이용하여 정수계획모델의 최적해를 구하라.



$x_1 \leq 3$ 추가　　　　$x_1 \geq 4$ 추가

마 디 6
x_1 = 3
x_2 = 1
최대값 : 175

마 디 7
실행불가능해

상한값 : 분기가 없는 해 중에서 최대값

하한값 : 하한값은 정수의 해 중에서 최대값

답> x_1 =3 , x_2= 4, z = 330

(d) (a)에서 구한 최적해와 (b)에서 구한 최적해를 비교평가하라.

답> 정수의 조건이 삽입될 때의 최적해는 정수의 조건이 무시된 경우의 최적해보다 그 값이 클 수는 없다.

8 아래와 같은 정수계획문제가 있다.

(a) 정수조건을 무시한 선형계획모형의 최적해를 그래프를 이용하여 구하라.

답> x_1 =30/7 , x_2= 18/7, z = 150/7

(b) (x_1, x_2)가 가질 수 있는 모든 경우를 나열하면서 주어진 문제의 최적해를 구하여 보라.

답> (0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),
(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,0),(4,1),(4,2),(5,0),(5,1),(6,0)

(c) 분기탐색법을 이용하여 최적해를 구하라.

답> x_1 =3 , x_2= 3, z = 21

(d) (a)에서 구한 최적해와 (c)에서 구한 정수최적해를 비교평가하라.

9 (a) 정수조건을 무시한 선형계획모형의 최적해를 그래프를 이용하여 구하라.

답> x_1 =44 4/9 , x_2= 0, z = 755 5/9

(b) 그래프를 이용하여 주어진 문제의 정수최적해를 구해보라.

답> x_1 =44 , x_2= 20, z = 754

(c) 분기탐색법을 이용하여 최적해를 구하라.

10 (a) 순현재가치를 최대로 하는 투자계획을 수립하기 위한 정수계획모델을 제시하라.

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 투자안 1 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

$x_2 \Rightarrow$ 투자안 2 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

$x_3 \Rightarrow$ 투자안 3 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

x_4 ⇒ 투자안 4 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

x_5 ⇒ 투자안 5 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

x_6 ⇒ 투자안 6 이 선택되는 경우 1, 선택되지 않으면 0

목적함수 : Minimize $z = 40x_1 + 60x_2 + 105x_3 + 40x_4 + 80x_5 + 30x_6$

제약조건 : subject to

$30x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 20x_4 + 50x_5 + 10x_6 \le 105$ (첫해의 투자가능금액)

$10x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 5x_6 \le 70$ (둘째 해의 투자가능금액)

$40x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 18x_4 + 40x_5 + 9x_6 \le 87.5$ (셋째 해의 투자가능금액)

모든 변수는 이진변수이어야 함.

(b) 투자안 1 과 투자안 2 를 동시에 추진하는 것이 바람직하지 못할 때 정수계획모델은 어떻게 수정되어야 하는가?

답> 아래의 제약조건을 추가시킨다.

$x_1 + x_2 = 1$

(c) 투자안 3 이 선택되면 반드시 투자안 5 도 선택되어야 할 때 정수계획모델을 작성하라.

답> 아래의 제약조건을 추가시킨다.

$x_3 \le x_5$

(d) 투자안 4 가 선택되기 전 투자안 1 과 투자안 3 이 먼저 선택되어야 하는 경우의 정수계획모델을 작성하시오.

답> 아래의 제약조건을 추가시킨다.

$x_1 + x_3 \ge 2x_4$

(e) 선택할 수 있는 투자안의 수가 최대 4 개일 때 추가되어야 할 제약식을 적어라.

답> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 4$

11 답>

정수계획모델:

변수정의 : x_1 ⇒ 대절할 대형버스의 수

x_2 ⇒ 대절할 소형버스의 수

목적함수 : Minimize $z = 20x_1 + 12x_2$

제약조건 : subject to

$45x_1 + 24x_2 \ge 600$ (탑승인원)

$200x_1 + 100x_2 \ge 2500$ (수화물)

비음수조건: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, 정수

답> x_1 =14, x_2= 0, z = 280

12 (a) 투자계획 2 과 3 을 수행하지 않고는 투자계획 4 를 추진할 수 없다. 이를 표현하는 제약식을 적어라. 답> 2 x_4 <= x_2 + x_3

(b) 투자계획 1 과 4 를 수행하는 경우에는 반드시 투자계획 6 을 수행해야 한다. 이를 제약식으로 표현하라. 답> x_6 >= x_1 + x_4 - 1

(c) 투자계획 1, 2, 4, 5 중 최소한 두 개는 추진해야 함을 나타내는 제약식을 적어라.

답> $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 2$

(d) 투자계획 3 과 5 는 동시에 추진해야 함을 나타내는 식을 쓰시오. 답> $x_3 + x_5 = 2$

(e) 투자계획 1, 2, 4 중 단 한 개를 추진해야 함을 나타내는 제약식을 쓰시오.

답> $x_1 + x_2 + x_4 = 1$

13 답>

정수계획모델:

변수정의 : $x_1 \Rightarrow$ 파출소가 위치 A 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_2 \Rightarrow$ 파출소가 위치 B 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_3 \Rightarrow$ 파출소가 위치 C 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_4 \Rightarrow$ 파출소가 위치 D 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_5 \Rightarrow$ 파출소가 위치 E 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_6 \Rightarrow$ 파출소가 위치 F 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

$x_7 \Rightarrow$ 파출소가 위치 G 에 설치되는 경우 1, 설치되지 않으면 0

목적함수 : Minimize $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

제약조건 : subject to

$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \geq 1$ (행정구역 1을 담당)

$x_2 + x_4 \geq 1$ (행정구역 2을 담당)

$x_3 + x_5 \geq 1$ (행정구역 3을 담당)

$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ (행정구역 4을 담당)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1$ (행정구역 5을 담당)

$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$ (행정구역 6을 담당)

$x_1 + x_2 + x_7 \geq 1$ (행정구역 7을 담당)

모든 변수는 이진변수이어야 함.

제 9 장 연습문제

$\boxed{1}$

답> X = 0, $f(x) = 40$

$\boxed{2}$

답> $x_1 = 3\ 20/23$, $x_2 = -\ 16/23$, $f(x_1, x_2) = 11\ 5/23$

$\boxed{3}$ (a) 함수의 최대치를 구하라. 답> $f(x) = -40\frac{3}{4}$ $x=\frac{1}{4}$

(b) $0 \le x \le 5$ 범위에서 함수의 최대값과 최소값을 구하라. 답> $f(x) = 230$, x = 5

(c) $2 \le x \le 5$ 구간에서 이 함수의 최대값을 구하라. 답> 230

$\boxed{4}$ (a) 다음 함수의 최소값을 구하라.

답> x = 0에서 최대값 30을 갖고, x = 4에서 최소값 -34를 갖는다.

(b) $0 \le x \le 3$ 범위에서 함수의 최소값을 구하라.

답> x = 3에서 최소값 -24를 갖는다

$\boxed{5}$ 답> 상점의 크기가 6 평일 때 월간 판매액은 208만원이 된다.

$\boxed{6}$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) = 24x_1^2 - 76\,x_1 + 4\,x_2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 16\,x_1^2$$

(a) $x_1=-1$, $x_2=2$

답> $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) = 8$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = 2$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 16\ -16 = 0 \implies \text{안점}$$

(b) x_1=2, x_2=-2

답> $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})$ = -64, $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2})$ = 2, $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2$ = 64

$(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2$ = -128 - 64 = -192 < 0, 최대값

(c) x_1=-2, x_2=-2

답> $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})$ = 240, $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2})$ = 2, $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2$ = 64

$(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2$ = 480 - 64 = 416 > 0, 최소값

$\boxed{7}$

답> x = 100, 총 판매량은 22000개

$\boxed{8}$ 문제 $\boxed{7}$ 에서 총판매액을 최대로 만드는 제품의 가격을 결정하라.

답>

총판매액 = $-x^3 + 200x^2 + 12000x$

1차 도함수를 구하면,

$-3x^2 + 400x + 12000 = 0$

x = $-200 \pm \sqrt{(40000 + 36000)}$ / 3

x = 25, or x = 158, x = -25는 최소값이고 x = 158.56 은 최대값, 따라서 총 판매액을 최대로 하는 제품의 가격은 약 158.56이 된다.

$\boxed{9}$

(a) 답> 1,020,000

(b) 답> 순이익 = 총판매비 - 총생산비

총판매비 = 30000x, 총생산비 = $x^2 - 2000x + 1,020,000$ 따라서

순이익 = $-x^2 + 32000x - 1,020,000$

(c) 답> 순이익 = $-x^2 + 32000x - 1,020,000$

순이익의 1차 도함수 = -2x + 32000 ==> 0,

x = 16000, 이때 순이익은 254,980,000

$\boxed{10}$ (a) 이익을 의사결정변수로 하여 두 제품의 판매이익을 나타내는 수리적 모델을 작성하라.

답 > 판매이익 = 판매액 - 판매비용

판매액 = $p_1(16-2p_1)$ + $p_2(12-p_2)$

판매비용 = $(16-2p_1)(16-2p_1) - (16-2p_1)(12-p_2) + 2(12-p_2)(12-p_2) + 10$

$= 256-64p_1+4p_1^2 - 192+24p_1+16p_2-2p_1p_2 + 288-48p_2+2p_2^2 + 10$

$= 362-40p_1+4p_1^2-32p_2+2p_2^2 -2p_1p_2$

따라서 판매이익 = $16p_1 - 2p_1^2 + 12p_2 - p_2^2 -362+40p_1-4p_1^2+32p_2-2p_2^2+2p_1p_2$

$= -6p_1^2-3p_2^2+56p_1+44p_2+2p_1p_2-362$

(b) (a)를 풀어 이익을 최대로 하는 가격과 생산량을 결정하라.

위의 판매이익을 나타내는 함수의 p_1과 p_2에 대한 편도함수를 구해서 0 으로 놓으면,

$-12p_1+56+2p_2 = 0$

$2p_1+44-6p_2 = 0$

두 식을 만족시키는 p_1과 p_2의 값을 구하면

p_1 = -22 +3*160/17 = 106/17, p_2 = 320/34 = 160/17

주어진 p_1, p_2 의 값이 최소값, 혹은 최대값인지 확인하기 위해 2차도함수를 구한 후 법칙 4를 적용하면,

$(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}) = -12,\ (\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) = -6,\ (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2 = 2,$

따라서 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2 = 72 -4 = 68 > 0$, 따라서 최대값

각 제품의 생산량을 구하면,

제품 1 = $16-2p_1$ = 16 -2*106/17 = 60/17

제품 2 = $12-p_2$ = 12 -160/17 = 44/17

판매이익 = $19\frac{11}{17}$

11 답>

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2+4x_2^2-8x_1-12x_2+36 + \lambda(4-x_1-4x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 8 - \lambda = 0,\quad x_1 = 4 + \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8x_2 - 12 - 4\lambda = 0,\quad x_2 = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4 - x_1 - 4x_2 = 0 \implies 4 - 4 - \tfrac{1}{2}\lambda - 6 - 2\lambda = 0 \implies 2\tfrac{1}{2}\lambda = -6,\ \lambda = -2.4$$

$x_1 = 2.8$

$x_2 = 0.3$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 8, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 16 > 0$$

따라서 $x_1 = 2.8$, $x_2 = 0.3$ 일 때 최소값 Z = 18.2

12 답>

제약조건을 무시한 최적해는 $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ 이다. 하지만 이들 값은 제약조건을 벗어나게 되므로 부등식의 제약조건을 등식의 형태로 바꾼 후 풀어보자.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 + \lambda(10 - x_1 - 2x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 - \lambda = 0, \quad x_1 = 5 + \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 10 - 2\lambda = 0, \quad x_2 = 5 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - 2x_2 = 0 \implies 10-5-\tfrac{1}{2}\lambda-10-2\lambda = 0 \implies -5 - 2\tfrac{1}{2}\lambda = 0,\ \lambda = -2$$

$x_1 = 4$

$x_2 = 3$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 4 > 0$$

따라서 $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ 일 때 최소값 Z = -45

13 답>

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2+2x_2^2-4x_1-8x_2 + 16+\lambda(3-x_1^2-2x_2^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda x_1 = 0, \quad x_1 = 2 / (1-\lambda)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 8 - 4\lambda x_2 = 0, \quad x_2 = 2 / (1-\lambda)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3 - x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \implies 3 - \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 - 2*\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 = 0 \implies -5 -2\tfrac{1}{2}\lambda = 0, \ \lambda = -1 \text{ or } \lambda = 3$$

$\lambda = -1$ 이면 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ 이 된다.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2-2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 4-4\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 32 > 0$$

따라서 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ 일 때 최소값 Z = 7 이 된다.

하지만 $\lambda = 3$ 이면 $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ 이 되고 따라서,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2-2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 4-4\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 32 > 0$$

따라서 $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ 일 때 최대값 Z = 31 이 된다.

14 (a) 제약조건을 무시한 채 최소값을 구하라.

답>

$$f(x_1, x_2) = x_1^2+3x_2^2-12x_1+4x_2 - 2x_1x_2 + 50$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 12 - 2x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2 + 4 - 2x_1 = 0,$$

$4x_2 - 8 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 = 8$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 12 - 4 = 8 > 0$$

따라서 $x_1 = 8$, $x_2 = 2$ 일 때 최소값 Z = 6

(b) (a)의 해가 제약조건도 만족시킬 수 있는가? 만약 만족시키지못하면 제약조건을 만족시키는 최적해를 구하라.

답>

만족시키지 못함. 따라서 제약식을 등식으로 바꾼 후 최적해를 구하면 아래와 같이 된다.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1 + 4x_2 - 2x_1x_2 + 50 + \lambda(10 - x_1 - 4x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 12 - 2x_2 - \lambda = 0, \quad x_1 = 8 + 1\tfrac{3}{4}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_2 + 4 - 2x_1 - 4\lambda = 0, \quad x_2 = 2 + 1\tfrac{1}{4}\lambda)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - 4x_2 = 0 \implies \lambda = -24/35$$

따라서 $\lambda = -8/9$, $x_1 = 58/9$, $x_2 = 8/9$ 이 된다.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = -2$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 12 - 4 = 8 > 0$$

따라서 $x_1 = 58/9$, $x_2 = 8/9$ 일 때 최소값 Z = $8\tfrac{2}{3}$ 이 된다.

(c) 제약식의 우측상수가 10 에서 11 로 증가하면 목적함수의 값은 어떻게 변할까?

답> $\lambda = -8/9$ 이므로 8/9 만큼 감소함.

15 (a) 최대값을 구하라.

답> 제약조건을 무시한 채 최대값을 구해보면,

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_1 + 12x_2 - 30$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1 + 8 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_2 + 12 = 0,$$

$x_1 = 4$, $x_2 = 3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 8 - 0 = 8 > 0$$

따라서 $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ 일 때 최소값 Z = 4

(b) 주어진 제약식이 부등식이 아니라 등식일 경우 최대값은 어떻게 변하는가?
답>

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_1 + 12x_2 - 30 + \lambda(24 - 2x_1 - 4x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 8 - 2\lambda = 0, \quad x_1 = 4 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4x_2 + 12 - 4\lambda = 0, \quad x_2 = 3 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 24 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \implies \lambda = -\tfrac{2}{3}$$

따라서 $\lambda = -\tfrac{2}{3}$, $x_1 = 3\tfrac{1}{3}$, $x_2 = 2\tfrac{1}{3}$ 이 된다.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 8 - 0 = 8 > 0$$

따라서 $x_1 = 3\tfrac{1}{3}$, $x_2 = 2\tfrac{1}{3}$ 일 때 최소값 Z = $2\tfrac{2}{3}$ 이 된다.

(c) 답> 변함없다.

16 (a) 답>

$$x_2 = -\tfrac{2}{3}x_1 + 6$$

$$Z = x_1^2 - 11x_1 + \left(-\tfrac{2}{3}x_1 + 6\right)^2 - 9\left(-\tfrac{2}{3}x_1 + 6\right) + 31$$

$$= 13/9\, x_1^2 - 13x_1 + 13 = 0$$

$$= x_1^2 - 9x_1 + 9 = 0$$

1차 도함수를 구하면,

$$2x_1 - 9 = 0, \quad x_1 = 4.5, \quad x_2 = -\tfrac{2}{3}(4.5) + 6 = -3 + 6 = 3, \quad z = -16.25$$

(b) 라그랑쥐승수를 이용하여 최적해를 구하라.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 11x_1 - 9x_2 + 31 + \lambda(18 - 2x_1 - 3x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 11 - 2\lambda = 0, \quad x_1 = 5.5 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 9 - 3\lambda = 0, \quad x_2 = 4.5 + 1.5\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 18 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \implies \lambda = -1$$

따라서 $\lambda = -1$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ 이 된다.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 4 - 0 = 8 > 0$$

따라서 $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ 일 때 최소값 $Z = -16\frac{1}{4}$ 이 된다.

(c) $\lambda = -1$ 이므로 목적함수의 값은 $-(-1)$ 즉, 1만큼 늘어나게 된다.

17 (a)

Minimize $Z = x_1(x_1^2 - x_1 + 5) + x_2(2x_2 - 2)$

subject to

$$x_1 + x_2 = 2$$

(b)

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^3 - x_1^2 + 5x_1 + 2x_2^2 - 2x_2 + \lambda(2 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_1 + 5 - \lambda = 0 \qquad \text{식 1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2 - \lambda = 0 \qquad \text{식 2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 - x_1 - x_2 = 0 \qquad \text{식 3}$$

식 1에서 식 2를 빼어 λ를 제거하면,

$3x_1^2 - 2x_1 + 5 - 4x_2 + 2 = 0$ 가 된다. 식 4

변수 x_2 를 제거하기 위해 식 3 에서 $x_2 = 2 - x_1$ 을 유도하여 식 4 에 대입하면 아래와 같이 된다.

$3x_1^2 - 2x_1 + 5 - 4(2 - x_1) + 2 = 0,$

$3x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0$, $x_1 = -1$ or $x_1 = ⅓$ 이 된다.

$x_1 = -1$ 이면, $x_2 = 3$ 이 되고 $\lambda = 10$ 이 된다. 이때 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2 = -8 * 4 - 0 = -32$ 가 되므로 $x_1 = -1$ 과 $x_2 = 3$ 는 최대값도 최소값도 아닌 값이 된다.

다음, $x_1 = ⅓$ 이면, $x_2 = 1⅔$ 이 되고 $\lambda = 4⅔$ 이 된다. 이때 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2 = 0 * 4 - 0 = 0$ 가 되면서 법칙 4 (충분조건)의 예외적인 경우로 국부적 최소값이 된다.

$x_1 = ⅓$, $x_2 = 1⅔$ $\lambda = 10$ 일 때, 최소 총생산비 z =3 22/27 이 된다.

18 다음 문제를 생각하자.

(a) 쿤-터커 정리를 이용하여 최적해를 구하라.

답> 쿤-터커 정리를 주어진 문제에 대입하면 아래와 같다.

1) $2x_1 - 10 + x_2 \le \lambda_1 + 2\lambda_2$

$x_1 - 7 + 2x_2 \le 4\lambda_1 + 3\lambda_2$

2) $x_1 + 4x_2 \le 8$

$2x_1 + 3x_2 \le 12$

3) $x_1, x_2 \ge 0$

4) $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$

5) $x_1 = 0$ 아니면 $2x_1 - 10 + x_2 \le \lambda_1 + 2\lambda_2$ 이다.

$x_2 = 0$ 아니면 $x_1 - 7 + 2x_2 \le 4\lambda_1 + 3\lambda_2$ 이다.

6) $\lambda_1 = 0$ 아니면 $x_1 + 3x_2 = 8$ 이다.

$\lambda_2 = 0$ 아니면 $2x_1 + 3x_2 = 12$ 이다.

위 경우를 모두 살펴보면 아래의 표와 같다.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	목적함수의 값
경우 1 :	0	0	0	0	30
경우 2 :	0	0	0	$2x_1+3x_2=12$	실행불가능
경우 3 :	0	0	$x_1+3x_2=8$	0	실행불가능
경우 4 :	0	0	$x_1+3x_2=8$	$2x_1+3x_2=12$	실행불가능
경우 5 :	0	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	0	0	17.75
경우 6 :	0	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	0	$2x_1+3x_2=12$	18

경우 7 :	0	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	$x_1+3x_2=8$	0	실행불가능
경우 8 :	0	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	$x_1+3x_2=8$	$2x_1+3x_2=12$	실행불가능
경우 9 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	0	0	0	5
경우 10 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	0	0	$2x_1+3x_2=12$	6
경우 11 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	0	$x_1+3x_2=8$	0	14
경우 12 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	0	$x_1+3x_2=8$	$2x_1+3x_2=12$	실행불가능
경우 13 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	0	0	5.4444
경우 14 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	0	$2x_1+3x_2=12$	3.7143
경우 15 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	$x_1+3x_2=8$	0	3.7777
경우 16 :	$2x_1-10+x_2=\lambda_1+2\lambda_2$	$x_1-7+2x_2=4\lambda_1+3\lambda_2$	$x_1+3x_2=8$	$2x_1+3x_2=12$	실행불가능

경우 14 가 가장 작은 값을 제공한다.

(b) 각 제약식에서 우변항이 한 단위 증가할 때 목적함수의 값은 어떻게 변하는가?

경우 14의 λ_1 과 λ_2의 값이 각각 0 와 -1/7 이므로 첫 번째 제약식의 우변항의 증가는 목적함수에 마무런 영향을 주지 못하나 두 번째 제약식의 경우 1/7 만큼 감소하게 된다.